Министерство сельского хозяйства Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Воронежский государственный аграрный университет
имени императора Петра I»

Агроинженерный факультет

Кафедра высшей математики и теоретической механики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Учебно-методическое пособие
для студентов заочной формы обучения по направлению
09.03.03 – «Прикладная информатика»
профиль – «Прикладная информатика в менеджменте»

Воронеж
2014

УДК 51

Составители: доценты кафедры математики ВГАУ С.Н. Дементьев, П.В. Москалев, ст.преподаватель А.С. Чесноков

Рецензенты: заведующий кафедрой информационного обеспечения и моделирования агроэкономических систем, д.э.н., профессор Улезько А.В.

старший преподаватель кафедры высшей математики Воронежского государственного университета инженерных технологий, к.ф.-м.н Соболева Е.А.

Учебно-методическое пособие рассмотрено и рекомендовано к изданию на заседании кафедры высшей математики и теоретической механики ВГАУ (протокол № 4 от 09.12.2013 г.).

Учебно-методическое пособие рассмотрено и рекомендовано к изданию на заседании методической комиссии агроинженерного факультета ВГАУ (протокол № 7 от 06.05.2014 г.).

Учебно-методическое пособие рассмотрено и рекомендовано к изданию на заседании методической комиссии гуманитарно-правового факультета ВГАУ (протокол № 8 от 21.05.2014 г.).

ПРОГРАММА КУРСА «МАТЕМАТИКА»

Раздел 1. Линейная алгебра, векторный анализ и аналитическая геометрия

- Определители второго и третьего порядков и их свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по элементам какого-либо ряда. Понятие об определителях n-го порядка.
- Решение систем линейных алгебраических уравнений. Формулы Крамера. Метод Гаусса.
- Векторы. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число. Длина вектора. Угол между векторами. Расстояние между двумя точками. Проекция вектора на ось. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов.
- Разложение вектора по системе векторов. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Базис и ранг системы векторов.
- Матрицы. Ранг матрицы. Действия над матрицами. Обратная матрица. Матричная запись системы линейных уравнений и ее решение. Теорема Кронекера-Капелли.
- Системы координат на прямой, плоскости, в пространстве. Основные задачи на плоскости (расстояние между двумя точками, деление отрезка в заданном отношении).
- Понятие об уравнении линии. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой. Угол между двумя прямыми; условия параллельности и перпендикулярности прямых. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Пересечение двух прямых.
- Неравенства и системы неравенств первой степени на плоскости. Геометрический смысл.
- Канонические уравнения кривых второго порядка: окружности, эллипса, гиперболы, параболы.
- Плоскость. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Общее уравнение

плоскости, его частные виды. Геометрический смысл неравенства и системы линейных неравенств в пространстве.
- Понятие линейного пространства. Размерность линейного пространства. Понятие евклидова пространства. Ортогональность.

Раздел 2. Дифференциальное исчисление функций одной независимой переменной

- Постоянные и переменные величины. Определение функции. Область определения функции; способы ее задания. Графическое изображение функции. Основные сведения из классификации функций.
- Числовые последовательности, их сходимость. Предел числовой последовательности. Теорема о существовании предела монотонной ограниченной последовательности (формулировка).
- Предел функции. Основные теоремы о пределах. Первый и второй замечательные пределы. Неопределенные выражения и способы их раскрытия (примеры). Сравнение бесконечно малых величин.
- Непрерывность функции в точке и на интервале. Точки разрыва функции. Свойства функций, непрерывных на замкнутых множествах.
- Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной, ее геометрический и механический смысл.
- Правила дифференцирования функций. Производные основных элементарных функций. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные высших порядков.
- Дифференциал функции; его геометрический смысл. Свойства дифференциала. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.
- Применение производной к вычислению пределов (правило Лопиталя).
- Теоремы Ролля, Лагранжа. Применение производной к исследованию функций. Экстремумы функции. Нахождение

наибольшего и наименьшего значений функции на интервале.

- Выпуклость и вогнутость графика функции, точки перегиба. Асимптоты кривой. Схема исследования функции и построения ее графика.
- Приближенное решение уравнений: графическое отделение корней методом проб; метод хорд и касательных.

Раздел 3. Дифференциальное исчисление функций нескольких независимых переменных

- Определение функции нескольких независимых переменных. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
- Частные производные функции нескольких независимых переменных, их геометрический смысл (для случая двух независимых переменных). Частные производные высших порядков.
- Полный дифференциал функции нескольких независимых переменных, его применение в приближенных вычислениях.
- Экстремум функции многих переменных. Нахождение наибольших и наименьших значений функции.
- Задача обработки наблюдений. Подбор параметров кривых по способу наименьших квадратов.
- Скалярное и векторное поля. Производная по направлению. Градиент функции; свойства градиента.

Раздел 4. Интегральное исчисление

- Понятие неопределенного интеграла и его свойства. Таблица основных неопределенных интегралов.
- Интегрирование методом замены переменной, интегрирование по частям. Интегрирование рациональных дробей.
- Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Понятие об интегрируемой функции, формулировка теоремы существования. Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем.

- Производная от определенного интеграла по верхнему пределу. Связь между определенным и неопределенным интегралом (формула Ньютона-Лейбница).
- Вычисление определенных интегралов способом подстановки и по частям. Интегрирование четных и нечетных функции в симметричных пределах.
- Приближенное вычисление определенных интегралов по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона.
- Геометрические приложения определенного интеграла: вычисление площадей фигур, объемов тел по площадям сечений и тел вращения, длин дуг кривых, площадей поверхностей вращения. Примеры приложения интеграла к решению простейших задач механики и физики.
- Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования и от неограниченных функций. Примеры сходящихся и расходящихся интегралов.
- Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла. Определение двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла. Геометрические приложения двойного интеграла. Понятие о тройном интеграле.

Раздел 5. Дифференциальные уравнения

- Понятие о дифференциальном уравнении. Дифференциальные уравнения первого порядка. Понятие об общем и частном решениях. Начальные условия. Интегральные кривые.
- Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения. Линейные дифференциальные уравнения.
- Теорема о существовании и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка.
- Поле направлений дифференциального уравнения. Изоклины. Метод Эйлера численного решения дифференциальных уравнений первого порядка.
- Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка. Линейно-независимые решения. Структура общего решения.

- Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Общее решение уравнения.
- Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка. Метод вариации произвольных постоянных. Частные решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами для правых частей в виде функций $A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n$, $Ae^{\alpha x}$, $A\cos\beta x + B\sin\beta x$ и их произведений.
- Линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Раздел 6. Ряды

- Числовые последовательности.
- Сходимость числовых рядов.
- Область сходимости степенного ряда.
- Ряды Тейлора (Маклорена).

Раздел 7. Численные методы

- Численные методы решения алгебраических уравнений.
- Численные методы анализа.
- Численные методы решения дифференциальных уравнений.
- Интерполирование функций: интерполяционный многочлен Лагранжа.

Библиографический список

1. *Кремер Н.Ш.* Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов /*Н.Ш. Кремер* [*и др.*]; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ, 2000.

2. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов: в 2 т. /*Н.С. Пискунов.* – М.: ИНТЕГРАЛ-ПРЕСС, 2002.

3. *Кудрявцев В. А.* Краткий курс высшей математики / *В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович*. – М.: Наука, 2001.

4. *Данко П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / *П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова.*– М.: Издательский дом «Оникс 21 Век»: Мир и образование, 2003.

5. *Москалев П.В.* Высшая математика. Краткий курс: Учебное пособие /*П.В. Москалев, В.П. Богатова, И.В. Гриднева*; под ред. проф. В.П. Шацкого; Воронеж.гос.агр.ун-т.– Воронеж, 2009.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Студент выполняет тот вариант контрольных работ, номер которого (0, 1, 2,...,9) совпадает с последней цифрой его учебного шифра. Задания, обязательные для решения, должны иметь номера, последняя цифра которых – номер варианта.

Каждая контрольная работа должна быть выполнена в отдельной ученической тетради. На внешней обложке тетради следует указать название учебной дисциплины, по которой выполнена контрольная работа, номер контрольной работы, фамилию ёи инициалы студента, факультет, специальность, полный учебный шифр.

Перед выполнением контрольной работы студент должен изучить требуемые разделы рекомендуемой учебной литературы, конспектов лекций и практических занятий, а также разобраться в принципах решения соответствующих типовых примеров из «Методических указаний».

Перед решениями заданий необходимо записывать их условия. Пояснения к решениям должны быть достаточно подробными и аккуратно выполненными. Для замечаний преподавателя нужно на каждой странице тетради оставлять поля.

На экзамен (зачет) студент должен явиться с зачтенной контрольной работой по соответствующим разделам учебной программы.

Если после проверки преподавателем Ваша контрольная работа помечена грифом «зачтено условно», то Вы не высылаете ее на повторную проверку, а выполняете в той же тетради работу над ошибками и являетесь на экзамен (зачет).

Если Ваша контрольная работа не зачтена, то Вы после выполнения работы над ошибками высылаете тетрадь на повторную проверку.

ТЕМА 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Литература: [1], гл. 1, §§ 1.1–1.4; [3], гл. XVII, §§ 1 – 7; [5], гл. 1.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется матрицей? Как определяются линейные операции над матрицами и каковы их свойства?
2. Что называется алгебраическим дополнением?
3. Приведите способы вычисления определителей.
4. Что называется матрицей и расширенной матрицей системы линейных уравнений?
5. Что называется решением системы линейных уравнений? Какие системы называются совместными, а какие – несовместными?
6. Напишите формулы Крамера. В каком случае они применимы? Что можно сказать о системе, если ее определитель равен нулю?
7. При каком условии система линейных уравнений имеет единственное решение?
8. Как ищется обратная матрица и как она может быть использована при решении систем линейных алгебраических уравнений?

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ПРИМЕРА

Пример 1.1. Задана система алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 4; \\ 2x + y + 3z = 5; \\ 3x + 4y + z = -2. \end{cases}$$

Требуется решить заданную систему уравнений ***а)*** по формулам Крамера, ***б)*** с помощью обратной матрицы и сделать проверку полученного решения.

Решение.

а) Вычислим сначала главный определитель системы Δ, воспользовавшись следующим правилом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

В нашем случае

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1-12) - (-2) \cdot (2-9) + 1 \cdot (8-3) = -20.$$

Так как $\Delta \neq 0$, делаем вывод о том, что система имеет единственное решение. Для его отыскания вычислим вспомогательные определители $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (1-12) - (-2) \cdot (5+6) + 1 \cdot (20+2) = 0,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (5+6) - 4 \cdot (2-9) + 1 \cdot (-4-15) = 20,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2-20) - (-2) \cdot (-4-15) + 4 \cdot (8-3) = -40.$$

Далее, воспользовавшись формулами Крамера, окончательно получаем

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 0, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -1, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 2.$$

Осуществим проверку правильности полученного решения, подставив его в левую часть каждого уравнения заданной системы:

$$\begin{cases} 0-2\cdot(-1)+\quad 2= \ \ 4; \\ 2\cdot 0+\quad (-1)+3\cdot 2= \ \ 5; \\ 3\cdot 0+4\cdot(-1)+\quad 2=-2. \end{cases}$$

Все три равенства выполняются, следовательно, искомое решение рассмотренной системы получено и имеет следующий вид: $x = 0$; $y = -1$; $z = 2$.

б) Введем следующие матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \ B=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Тогда исходная система уравнений запишется $A\cdot X = B$ и ее решение будет иметь вид $X = A^{-1}\cdot B$, где

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta A}\cdot\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix},$$

а A_{ij}, $i, j = 1,2,3$ – алгебраические дополнения соответственных элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=-11, \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=7,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=5, \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=6,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-2, \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=-10,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-7, \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=5.$$

Таким образом, $X=A^{-1}\cdot B\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{-20}\cdot\begin{pmatrix}-11 & 6 & -7\\ 7 & -2 & -1\\ 5 & -10 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\ 5\\ -2\end{pmatrix}=\frac{1}{-20}\cdot\begin{pmatrix}(-11)\cdot 4+6\cdot 5+(-7)\cdot(-2)\\ 7\cdot 4+(-2)\cdot 5+(-1)\cdot(-2)\\ 5\cdot 4+(-10)\cdot 5+5\cdot(-2)\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{20}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 20\\ -40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 2\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{x=0,\ y=-1,\ z=2.}$$

Как и должно быть, результаты решения системы обоими способами совпадают.

ТЕМА 2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

Литература: [2], гл. I–IV; [3], гл. I, §§ 1–5, 7–11, [5], гл. 2.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Как определяют декартовы координаты точки на плоскости?
2. Чем отличаются координаты двух точек, симметричных относительно: а) оси Ox; б) оси Oy; в) начала координат?
3. Как вычислить расстояние между двумя точками на прямой и на плоскости?
4. Напишите формулы для координат середины отрезка через координаты его концов.
5. Напишите формулы для координат точки пересечения медиан треугольника через координаты его вершин.
6. Дайте определение уравнения линии на плоскости.
7. Как найти координаты точки пересечения двух линий на плоскости, заданных своими уравнениями?

8. Чем отличается уравнение прямой в декартовых координатах от уравнений других линий?
9. Напишите формулу для вычисления угла между прямыми.
10. Сформулируйте условие параллельности и перпендикулярности двух прямых?
11. Напишите уравнение прямой, проходящей: а) через заданную точку в заданном направлении; б) через две заданные точки.
12. Как написать уравнение медианы, высоты в треугольнике, если известны координаты его вершин?
13. Сформулируйте определение эллипса, гиперболы, параболы. Каковы канонические уравнения этих линий?

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

Пример 2.1. Даны координаты вершин треугольника ABC:

$$A(-1;\ 2),\ B(5;\ -1),\ C(-4;\ -5).$$

Требуется:
1) вычислить длину стороны AB, составить уравнения сторон AB и BC и вычислить их угловые коэффициенты;
2) вычислить внутренний угол при вершине B в радианах с точностью до 0,01;
3) составить уравнение медианы AE;
4) составить уравнение и вычислить длину высоты CD;
5) составить уравнение прямой, проходящей через точку E параллельно стороне AB и определить точку M ее пересечения с высотой CD;
6) составить уравнение окружности с центром в точке E, проходящей через вершину C.

Указание. *Заданный треугольник, все полученные линии и характерные точки построить в системе координат xOy.*

Решение.

1) Расстояние между точками $A(x_1;\, y_1)$ и $B(x_2;\, y_2)$ определяется по формуле

$$d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}\,, \qquad (2.1)$$

воспользовавшись которой находим длину стороны AB:

$$AB=\sqrt{(5+1)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}.$$

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки плоскости $A(x_1;\,y_1)$ и $B(x_2;\,y_2)$, имеет вид

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \qquad (2.2)$$

Подставляя в формулу (2.2) координаты точек A и B, получаем уравнение стороны AB:

$$\frac{y-2}{-1-2}=\frac{x+1}{5+1}; \qquad \frac{y-2}{-3}=\frac{x+1}{6}; \qquad \frac{y-2}{-1}=\frac{x+1}{2};$$

$$2y-4=-x-1; \qquad x+2y-3=0 \qquad (AB).$$

Угловой коэффициент k_{AB} прямой AB найдем, преобразовав полученное уравнение к виду уравнения прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$. В нашем случае уравнение имеет вид $2y = -x + 3$, то есть $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$, откуда находим, что $k_{AB}=-\frac{1}{2}$.

Аналогично получим уравнение прямой BC и найдем ее угловой коэффициент:

$$\frac{y+1}{-5+1}=\frac{x-5}{-4-5}; \qquad \frac{y+1}{-4}=\frac{x-5}{-9}; \qquad \frac{y+1}{1}=\frac{-4x+20}{-9};$$

$$-9y-9=-4x+20; \qquad -4x+9y+29=0 \qquad (BC).$$

Далее:

$$-9y=-4x+29; \qquad y=\frac{4}{9}x-\frac{29}{9}; \qquad k_{BC}=\frac{4}{9}.$$

2) При нахождении внутреннего угла B для заданного треугольника ABC воспользуемся формулой

$$\operatorname{tg}B=\frac{k_{BC}-k_{AB}}{1+k_{BC}\cdot k_{AB}}. \qquad (2.3)$$

Примечание. *Порядок вычисления разности угловых коэффициентов, стоящих в числителе этой дроби, зависит от взаимного расположения прямых AB и BC. Подумайте, как бы Вы стали искать внутренние углы A и C треугольника ABC?*

Подставив ранее вычисленные значения k_{AB} и k_{BC} в (2.3), находим

$$\operatorname{tg} B = \frac{\frac{4}{9}+\frac{1}{2}}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{4}{9}} = \frac{17}{14} \approx 1,2143.$$

Теперь, воспользовавшись таблицами В.М. Брадиса или инженерным микрокалькулятором, получаем значение угла $B \approx 0,88$ *рад*.

3) Для составления уравнения медианы AE найдем сначала координаты точки E, которая лежит на середине отрезка BC

$$x_E = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{5+(-4)}{2} = \frac{1}{2}; \qquad y_E = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{(-1)+(-5)}{2} = -3.$$

Подставив в уравнение (2.2) координаты точек A и E, получаем уравнение медианы AE:

$$\frac{y-2}{-3-2} = \frac{x+1}{\frac{1}{2}+1}; \qquad \frac{y-2}{-5} = \frac{x+1}{\frac{3}{2}}; \qquad \frac{3}{2}(y-2) = -5(x+1);$$

$$3(y-2) = -10(x+1); \qquad 10x+3y+4=0 \qquad (AE).$$

4) Для составления уравнения высоты CD воспользуемся уравнением прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0;y_0)$ с заданным угловым коэффициентом k, которое имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0), \tag{2.4}$$

и условием перпендикулярности прямых AB и CD, которое выражается соотношением

$$k_{AB} \cdot k_{CD} = -1,$$

откуда получим $k_{CD} = -\dfrac{1}{k_{AB}} = 2$.

Подставив в (2.4) вместо k значение $k_{CD} = 2$, а вместо $(x_0;\, y_0)$ соответствующие координаты точки C, получим искомое уравнение высоты CD:

$$y+5=2(x+4); \qquad y+5=2x+8; \qquad 2x-y+3=0 \qquad (CD).$$

Для вычисления длины высоты CD воспользуемся формулой для отыскания расстояния d от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой, заданной общим уравнением $Ax + By + C = 0$:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{2.5}$$

Подставив в (2.5) вместо $(x_0; y_0)$ координаты точки C, а вместо коэффициентов A, B, C их значения из общего уравнения прямой AB, получим длину d высоты CD:

$$d=\frac{|1\cdot(-4)+2\cdot(-5)-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{17}{\sqrt{5}}.$$

5) Для составления искомого уравнения прямой EM воспользуемся условием ее параллельности прямой AB:

$$k_{EM}=k_{AB}=-\frac{1}{2}.$$

Подставив в уравнение (2.4) вместо $(x_0; y_0)$ координаты точки E, а вместо k значение k_{EM}, получим уравнение искомой прямой EM:

$$y+3=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right); \qquad -2(y+3)=x-\frac{1}{2}; \qquad 2y+6=-x+\frac{1}{2};$$

$$4y+12=-2x+1; \qquad 2x+4y+11=0 \qquad (EM).$$

Для отыскания координат точки M пересечения прямых EM и CD решаем их уравнения совместно:

$$\begin{cases} 2x+4y+11=0; \\ 2x-\ \ y+\ \ 3=0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=-\dfrac{23}{10}; \\ y=-\dfrac{8}{5}. \end{cases}$$

Итак, $M\,(-2{,}3; -1{,}6)$.

6) Поскольку окружность имеет центр в точке $E(0{,}5; -3)$ и проходит через вершину $C(-4; -5)$, то ее радиус $R=EC$, т.е.

$$R=\sqrt{(-4-0,5)^2+(-5+3)^2}=\sqrt{\frac{81}{4}+4}=\frac{\sqrt{97}}{2}.$$

Каноническое уравнение окружности радиуса R с центром в точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

В нашем примере получаем $(x-0,5)^2+(y+3)^2=\frac{97}{4}$.

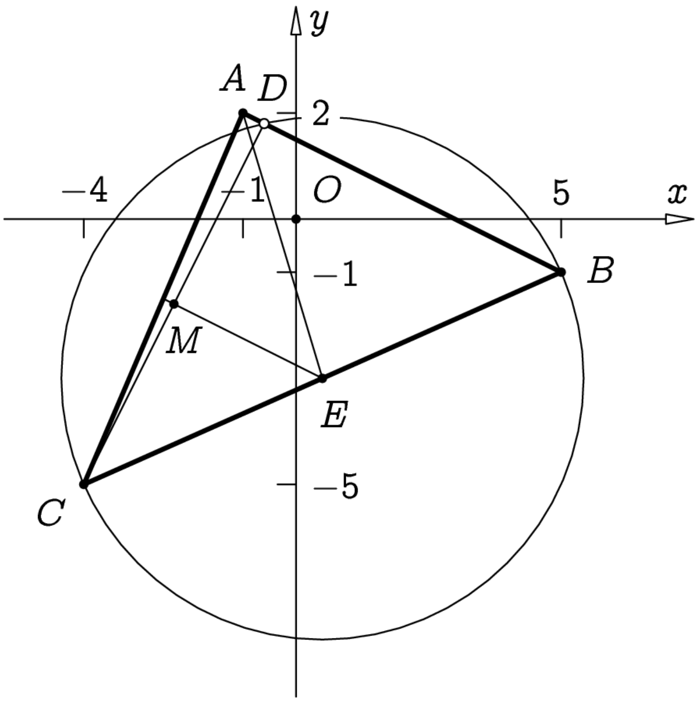

Рис.2.1. Аналитическая геометрия на плоскости. Пример 2.1

На рис.2.1 представлены заданный треугольник *ABC*, а также все полученные линии и характерные точки. *Отметим, что полученные координаты точки M соответствуют ее положению на чертеже, что говорит о правильности решения большинства пунктов задачи.*

Пример 2.2. Требуется составить уравнение линии, для каждой точки $M(x;y)$ которой известно, что ее расстояния до точки $A(3;-4)$ и до прямой $y=2$ равны.

Указание. *Все полученные линии и характерные точки построить в системе координат xOy.*

Решение.

Согласно формуле (2.1) из примера 1.1 расстояние от точки $M(x;y)$ до точки $A(3;-4)$ имеет вид

$$MA=\sqrt{\left(x-3\right)^2+\left(y+4\right)^2}\,.$$

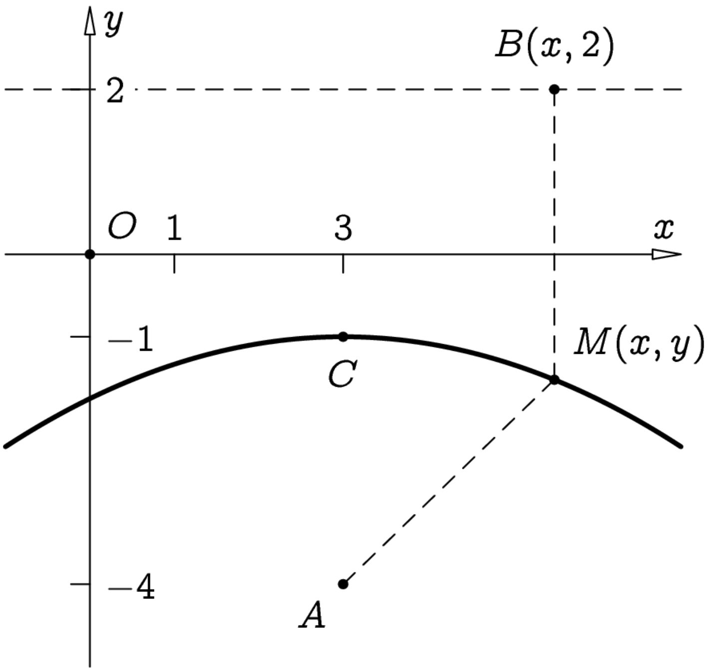

Рис.2.2. Аналитическая геометрия на плоскости. Пример 2.2

Кратчайшее расстояние от точки до прямой на плоскости определяется как длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на указанную прямую. Опустим из точки M на прямую $y = 2$ перпендикуляр MB (см. рис.2.2). Очевидно, $B(x;\ 2)$. Отсюда

$$MB=\sqrt{\left(x-x\right)^2+\left(y-2\right)^2}\,.$$

Так как $MA=MB$, то $MA^2=MB^2$ и можно записать

$$\left(x-3\right)^2+\left(y+4\right)^2=\left(y-2\right)^2,$$

$$\left(x-3\right)^2+y^2+8y+16=y^2-4y+4,$$

$$12y+12=-\left(x-3\right)^2,$$

$$y+1=-\frac{1}{12}\left(x-3\right)^2.$$

Анализируя вид последнего уравнения, делаем вывод, что оно определяет параболу с вершиной в точке $C(3;\ -1)$ и ветвями, направленными вниз.

На рис.2.2 показаны искомая линия (парабола) и характерные точки.

ТЕМА 3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Литература: [1], гл. I, §§ 1–3, [5], гл. 1.

При изучении этой темы следует учесть особенности применяемой терминологии. Обратите внимание, что упорядоченная тройка чисел может обозначать точку или вектор; что координаты вектора, будучи заданными, однозначно определяют длину вектора и его направление.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Сформулируйте определение вектора и модуля вектора?
2. Какие векторы называются коллинеарными, компланарными, равными?
3. Какие операции над векторами называются линейными и каковы свойства этих операций?
4. Что называется базисом и какой базис называется ортонормированным?
5. Как определяются координаты вектора через координаты его начальной и конечной точек?
6. Что называется скалярным произведением векторов, как оно вычисляется через координаты векторов-множителей в ортонормированном базисе?
7. Что называется векторным произведением векторов, как оно вычисляется через координаты векторов-множителей в ортонормированном базисе?
8. Что называется смешанным произведением векторов, как оно вычисляется через координаты векторов-множителей в ортонормированном базисе?
9. Как вычисляются длина вектора, расстояние между точками, угол между двумя векторами?
10. Опишите полярную, цилиндрическую и сферическую системы координат.
11. Какова особенность уравнений цилиндрической поверхности с образующими, параллельными одной из координатных осей?

11. Какие поверхности (линии) называются алгебраическими? Что называется порядком алгебраической поверхности?
12. Напишите уравнения прямой, проходящей через две точки в пространстве. Напишите уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ПРИМЕРА

Пример 3.1. Даны координаты вершин пирамиды *ABCD*:

$A(0; 0; 1)$, $B(2; 3; 5)$, $C(6; 2; 3)$, $D(3; 7; 2)$.

Требуется:

1) записать векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ в системе орт $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ и найти модули этих векторов;
2) найти угол между векторами $\overline{AB}$, $\overline{AC}$;
3) найти проекцию вектора $\overline{AD}$ на вектор $\overline{AB}$;
4) найти площадь грани *ABC*;
5) найти объем пирамиды *ABCD*;
6) составить уравнения ребра *AC* и грани *ABC*.

Решение.

1) Известно, что произвольный вектор $\overline{a}$ представляется в системе орт $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ по формуле

$$\overline{a} = a_x \overline{i} + a_y \overline{j} + a_z \overline{k}, \qquad (3.1)$$

где a_x, a_y, a_z – координаты вектора $\overline{a}$ в системе координат *xOy*, порожденной ортами, причем

$$a_x = \text{пр}_{Ox}\, \overline{a}, \quad a_y = \text{пр}_{Oy}\, \overline{a}, \quad a_z = \text{пр}_{Oz}\, \overline{a}.$$

Если заданы точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\cdot \overline{i} + (y_2 - y_1)\cdot \overline{j} + (z_2 - z_1)\cdot \overline{k}. \qquad (3.2)$$

Воспользовавшись формулой (3.2) и координатами заданных точек, получим

$$\overline{AB} = (2-0)\cdot \overline{i} + (3-0)\cdot \overline{j} + (5-1)\cdot \overline{k} = 2\overline{i} + 3\overline{j} + 4\overline{k};$$

$$\overline{AC} = (6-0)\cdot \overline{i} + (2-0)\cdot \overline{j} + (3-1)\cdot \overline{k} = 6\overline{i} + 2\overline{j} + 2\overline{k};$$

$$\overline{AD} = (3-0)\cdot \overline{i} + (7-0)\cdot \overline{j} + (2-1)\cdot \overline{k} = 3\overline{i} + 7\overline{j} + \overline{k}.$$

Если вектор $\overline{a}$ задан формулой (3.1), то его модуль вычисляется следующим образом:

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \qquad (3.3)$$

Используя формулу (3.3), получаем модули найденных векторов:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}; \quad \left|\overline{AC}\right| = 2\cdot\sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2} = 2\cdot\sqrt{11};$$

$$\left|\overline{AD}\right| = \sqrt{3^2 + 7^2 + 1^2} = \sqrt{59}.$$

2) Известна формула $\cos(\overline{a}\,\hat{,}\,\overline{b}) = \dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}$, где $\overline{a}\cdot\overline{b}$ − скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, которое можно вычислить следующим образом: $\overline{a}\cdot\overline{b} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z$.

В нашем случае

$$\cos\psi = \cos(\overline{AB}\,\hat{,}\,\overline{AC}) = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|} = \frac{2\cdot 6 + 3\cdot 2 + 4\cdot 2}{2\cdot\sqrt{29}\cdot\sqrt{11}} \approx 0,7279,$$

то есть $\psi \approx \arccos\left(0,7279\right) \approx 43^\circ$.

3) Известно, что $\text{пр}_{\overline{b}}\,\overline{a} = \dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{b}\right|}$, то есть в нашем случае

$$\text{пр}_{\overline{AB}}\,\overline{AD} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{\left|\overline{AB}\right|} = \frac{2\cdot 3 + 3\cdot 7 + 4\cdot 1}{\sqrt{29}} \approx 5,76.$$

4) Воспользуемся формулой для нахождения площади треугольника, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $S = \dfrac{1}{2}\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|$, где $\overline{a}\times\overline{b}$ − векторное произведение, вычисляемое по формуле

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

В нашем примере $S_{ABC}=1/2\cdot\left|\,\overline{AB}\times\overline{AC}\,\right|$, причем

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot\left(-\bar{i}+10\,\bar{j}-7\,\bar{k}\right).$$

Таким образом,

$$S_{ABC}=\frac{2}{2}\cdot\sqrt{(-1)^2+10^2+(-7)^2}=5\sqrt{6}\ \ (\textit{кв. ед.}).$$

5) Объем пирамиды, построенной на трех некомпланарных векторах $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$, можно найти по формуле $V=\frac{1}{6}\cdot\left|\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}\right|$, где $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$ – смешанное произведение векторов, которое вычисляется следующим образом:

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

В нашем случае $V_{ABCD}=1/6\cdot\left|\left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)\cdot\overline{AD}\,\right|$, где

$$\left(\overline{AB}\times\overline{AC}\right)\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}=2\cdot(2-14)-3\cdot(6-6)+4\cdot(42-6)=120\cdot$$

Таким образом,

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\cdot 120=20\ \ (\textit{куб. ед.}).$$

6) Известно, что уравнения прямой, проходящей через две заданные точки пространства $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ и $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$, имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{3.4}$$

Подставив в выражение (3.4) координаты точек A и C, получаем

$$\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-0}{2-0} = \frac{z-1}{3-1},$$

то есть уравнения ребра AC окончательно запишутся в виде

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2} \quad \text{или} \quad \frac{x}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}.$$

7) Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки пространства $A(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $B(x_2;\, y_2;\, z_2)$ $C(x_3;\, y_3;\, z_3)$ можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.5}$$

Подставляя в уравнение (3.5) координаты точек A, B, C, находим

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 2-0 & 3-0 & 5-1 \\ 6-0 & 2-0 & 3-1 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда последовательно получаем:

$$x \cdot (-2) - y \cdot (-20) + (z-1) \cdot (-14) = 0; \;\; -2x + 20y - 14z + 14 = 0;$$

$$x - 10y + 7z - 7 = 0.$$

Последнее выражение представляет собой уравнение общего вида искомой плоскости, проходящей через три заданные точки A, B, C.

ТЕМА 4. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ ФУНКЦИИ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Литература: [1], ч. I, гл. V, VI; [3], гл. V; [5], гл. 3.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Сформулируйте определения: переменной величины, функции, области определения функции.
2. Какие способы задания функции Вы знаете?
3. Какие функции называются элементарными?
4. Сформулируйте понятие предела переменной величины.
5. Дайте определение понятия предела функции.
6. Какая функция называется ограниченной?
7. В каком случае функция называется бесконечно малой?
8. Сформулируйте основные теоремы о пределах.
9. Дайте определение непрерывности функции в точке.
10. Укажите основные свойства непрерывных функций.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

Пример 4.1. Требуется найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-4}{3x^2-2x+5}$.

Решение. В данном случае при $x\to\infty$ числитель и знаменатель дроби также стремятся к бесконечности, т.е. мы сталкиваемся с неопределенностью вида $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{p(x)}{q(x)}=\dfrac{\infty}{\infty}$. Освобождение от неопределенности такого вида возможно путем вынесения за скобки в числителе и знаменателе дроби старшей степени переменной x. В нашем случае за скобки выносится x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-4}{3x^2-2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(3-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)}=\frac{2}{3}.$$

Пример 4.2. Требуется найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin x}{\mathrm{tg}^2\,4x\cdot\cos 2x}$.

Решение. В данном примере числитель и знаменатель дроби при $x\to 0$ также стремятся к нулю, т.е. мы сталкиваемся с неопределенностью вида $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{u(x)}{v(x)}=\dfrac{0}{0}$. Освобождение от нее возможно, если воспользоваться теоремой о первом замечательном пределе и ее очевидным следствием:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\,x}{x}=1.$$

Для решения нашего примера необходимо разложить заданную дробь на ряд сомножителей вида «функция (синус или тангенс), деленная на аргумент функции»:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin x}{\mathrm{tg}^2\,4x\cdot\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\sin x}{\mathrm{tg}\,4x\cdot\mathrm{tg}\,4x\cdot\cos 2x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\mathrm{tg}\,4x}\cdot\frac{4x}{\mathrm{tg}\,4x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos 2x}\cdot\frac{1}{16}=1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{16}.$$

ТЕМА 5. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Литература: [1], ч.I, гл. VII, VIII; [3] гл. VI, §§ 1, 2, 5, 6, 8, 9; [5], гл. 4.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Сформулируйте определение производной.
2. Каков геометрический смысл производной?
3. Что называется касательной к кривой? Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$.
4. Каков механический смысл первой и второй производной?
5. Каковы правила вычисления производных от суммы, произведения и частного двух функций?
6. Сформулируйте правило вычисления производной сложной функции.

7. Что называется дифференциалом функции?
8. Чем отличается дифференциал функции от ее приращения?

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

Указание. *При решении всех последующих примеров кроме таблицы производных необходимо использовать правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного (дроби) и теорему о производной сложной функции* (см. Приложение 1).

Пример 5.1. Требуется найти производную dy/dx от функции $y=\dfrac{\cos 7x}{\sqrt{1-3x^4}}$, пользуясь основными правилами и формулами дифференцирования.

Решение.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(\cos 7x)'\cdot\sqrt{1-3x^4}-\cos 7x\cdot\left(\sqrt{1-3x^4}\right)'}{\left(\sqrt{1-3x^4}\right)^2}=$$

$$=\frac{-7\sin 7x\cdot\sqrt{1-3x^4}-\dfrac{\cos 7x}{2\cdot\sqrt{1-3x^4}}\cdot\left(-12x^3\right)}{1-3x^4}.$$

Пример 5.2. Требуется найти производную dy/dx от функции $y=3^{\operatorname{tg} x}\cdot\sin 5x$, пользуясь основными правилами и формулами дифференцирования.

Решение.

$$\frac{dy}{dx}=\left(3^{\operatorname{tg} x}\right)'\cdot\sin 5x+3^{\operatorname{tg} x}\cdot(\sin 5x)'=3^{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{\ln 3}{\cos^2 x}\cdot\sin 5x+3^{\operatorname{tg} x}\cdot 5\cdot\cos 5x.$$

Пример 5.3. Требуется найти производную dy/dx от функции $y=\ln(\arcsin 6x)$, пользуясь основными правилами и формулами дифференцирования.

Решение. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\arcsin 6x}\cdot\left(\arcsin 6x\right)'=$

$$=\frac{1}{\arcsin 6x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(6x)^2}}\cdot(6x)'=$$

$$=\frac{1}{\arcsin 6x}\cdot\frac{6}{\sqrt{1-36x^2}}.$$

ТЕМА 6. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Литература: [1], ч. I, гл. IX, §§ 2–7; [3], гл. VII, §§ 4–6; [5], гл. 4.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Как формулируется теорема Лагранжа?
2. Каковы признаки возрастания, убывания функции?
3. Докажите, что функция $y = \cos(x) - x$ убывает на любом промежутке.
4. Сформулируйте правила нахождения экстремумов функции.
5. Приведите пример, показывающий, что обращение в нуль производной не является достаточным условием экстремума функции.
6. Как найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба кривой?
7. Покажите, что график функции $y=x^3/4+3x^2+ax+b$ не имеет точек перегиба, каковы бы ни были значения a и b.
8. Дайте определение асимптоты кривой. Как найти вертикальные и наклонные асимптоты графика функции?

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

При решении всех последующих примеров исследование функции $y = f(x)$ рекомендуется проводить по следующей схеме:

1) найти область определения функции;
2) исследовать функцию на непрерывность и найти асимптоты графика функции;
3) найти интервалы возрастания, убывания функции и точки ее экстремума;
4) найти интервалы выпуклости, вогнутости графика функции и точки перегиба;
5) найти точки пересечения графика функции с осями координат, и составить таблицу дополнительных точек;
6) построить график функции $y = f(x)$ в системе координат xOy на основании полученных данных.

Пример 6.1. Пусть $y = \frac{1}{4}\left(x^3 + 9x^2 + 15x - 9\right)$. Требуется, используя методы дифференциального исчисления, провести исследование заданной функции и на основании полученных данных построить ее график.

Решение. 1) Областью определения данной функции являются все действительные значения аргумента x, то есть $D(y) = \{x:\ x \in (-\infty; +\infty)\}$, а это значит, что функция непрерывна на всей числовой прямой и ее график не имеет вертикальных асимптот.

2) Выясним наличие у графика заданной функции наклонных асимптот. Для определения параметров уравнения асимптоты $y = kx + b$ воспользуемся формулами

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x\to\infty} \left(f(x) - kx\right).$$

Имеем

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3 + 9x^2 + 15x - 9}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4}\left(x^2 + 9x + 15 - \frac{9}{x}\right) = \infty.$$

Следовательно, график функции не имеет наклонных асимптот.

3) Исследуем функцию на экстремумы и определим интервалы монотонности. С этой целью найдем и приравняем к нулю ее производную

$$y' = \frac{3}{4}\left(x^2 + 6x + 5\right),$$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 6x + 5 = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение, делаем вывод о том, что функция имеет две критические точки первого рода $x_1 = -5,\ x_2 = -1$.

Разбиваем область определения этими точками на части и по изменению в них знака производной функции выявляем промежутки ее монотонности и наличие экстремумов

x	$(-\infty; -5)$	-5	$(-5; -1)$	-1	$(-1; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$y_{\max} = y(-5) = \frac{1}{4}\left[(-5)^3 + 9\cdot(-5)^2 + 15\cdot(-5) - 9\right] = 4;$$

$$y_{\min} = y(-1) = \frac{1}{4}\left[(-1)^3 + 9\cdot(-1)^2 + 15\cdot(-1) - 9\right] = -4.$$

4) Определим точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости. Для этого найдем вторую производную заданной функции и приравняем ее к нулю

$$y'' = \frac{3}{2}(x + 3),$$

$$y'' = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 3 = 0.$$

Итак, функция имеет одну критическую точку второго рода $x = -3$. Разобьем область определения полученной точкой на части, в каждой из которых установим знак второй производной

x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; +\infty)$
$f''(x)$	−	0	+
$f(x)$	$\frown$	т.п.	$\smile$

Значение $x = -3$ является абсциссой точки перегиба графика функции. В таком случае ордината этой точки

$$y_{\text{т.п.}} = y(-3) = \frac{1}{4}\left[(-3)^3 + 9\cdot(-3)^2 + 15\cdot(-3) - 9\right] = 0\,.$$

5) Для построения графика в выбранной системе координат изобразим: точку максимума $A(-5;\,4)$, минимума $B(-1;\,-4)$, перегиба $C(-3;\,0)$ и точку пересечения графика функции с осью Oy $D(0;\,-9/4)$.

6) С учетом результатов проведенных исследований построим график функции и все характерные точки в системе координат xOy (см. рис.6.1).

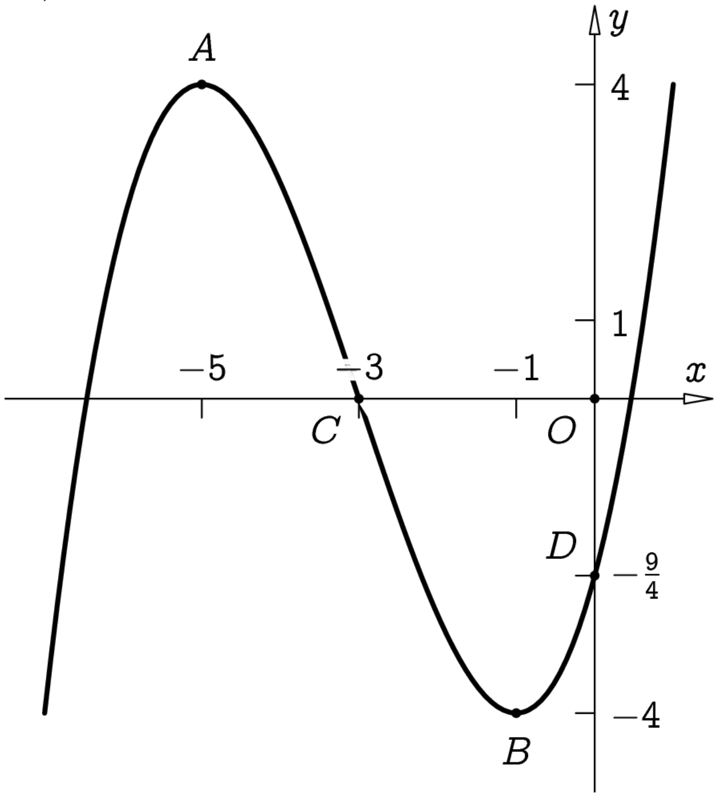

Рис.6.1. Исследование поведения функций. Пример 6.1

Пример 6.2. Пусть $y = \dfrac{x^2 + 20}{x - 4}$. Требуется, используя методы дифференциального исчисления, провести исследование заданной функции и на основании полученных данных построить ее график.

Решение. 1) Областью определения данной функции являются все действительные значения аргумента x, за исключением точки в которой знаменатель дроби становится равен нулю. Это значит, что функция непрерывна на всей числовой прямой, кроме точки $x = +4$, то есть

$$D(y)=\left\{x:\ x\in(-\infty;4)\cup(4;+\infty)\right\}.$$

2) Для классификации точки разрыва вычислим односторонние пределы функции в этой точке

$$\lim_{x\to 4-0} f(x)=\lim_{x\to 4-0}\frac{x^2+20}{x-4}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 4+0} f(x)=\lim_{x\to 4+0}\frac{x^2+20}{x-4}=+\infty.$$

Таким образом, данная точка является точкой разрыва второго рода, а прямая $x = +4$ — вертикальной асимптотой графика.

Выясним наличие у графика заданной функции наклонных асимптот. Для определения параметров уравнения асимптоты $y = kx + b$ воспользуемся формулами

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x};\quad b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

Имеем:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+20}{x^2-4x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{1+\frac{20}{x^2}}{1-\frac{4}{x}}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+20}{x-4}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+20-x^2+4x}{x-4}=4.$$

Таким образом, прямая $y = x + 4$ является наклонной асимптотой графика исследуемой функции.

3) Исследуем функцию на экстремумы и определим интервалы монотонности. С этой целью найдем и приравняем к нулю ее производную:

$$y' = \frac{2x\left(x-4\right)-\left(x^2+20\right)}{\left(x-4\right)^2} = \frac{x^2-8x-20}{\left(x-4\right)^2},$$

$$y'=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-8x-20=0.$$

Решая полученное квадратное уравнение, делаем вывод о том, что функция имеет две критические точки первого рода $x_1=-2$, $x_2=+10$.

Разбиваем область определения этими точками на части и по изменению в них знака производной функции выявляем промежутки ее монотонности и наличие экстремумов:

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 4)$	4	$(4; 10)$	10	$(10; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	н.с.	–	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	т.р.	$\searrow$	min	$\nearrow$

$$y_{\max} = y\left(-2\right) = \frac{\left(-2\right)^2+20}{-2-4} = -4;$$

$$y_{\min} = y\left(10\right) = \frac{\left(10\right)^2+20}{10-4} = 20.$$

4) Определим точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости. Для этого найдем вторую производную заданной функции и приравняем ее к нулю:

$$y'' = \frac{\left(2x-8\right)\left(x-4\right)^2-2\left(x-4\right)\left(x^2-8x-20\right)}{\left(x-4\right)^4} = \frac{72}{\left(x-4\right)^3},$$

$$72 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y'' \neq 0.$$

Итак, функция не имеет ни одной точки перегиба. В таком случае установим знак второй производной в каждом из промежутков области определения функции:

x	$(-\infty; 4)$	4	$(4; +\infty)$
$f''(x)$	–	н.с.	+

$f(x)$	$\frown$	т.р.	$\smile$

5) Для построения графика в выбранной системе координат изобразим точку $A(-2; -4)$ (max), $B(10; 20)$ (min), точку $C(4; 0)$ пересечения вертикальной асимптоты с осью Ox и точку $D(0; -5)$ пересечения графика функции с осью Oy.

6) С учетом результатов проведенных исследований построим график функции, его асимптоты и все характерные точки в системе координат xOy (см. рис.6.2).

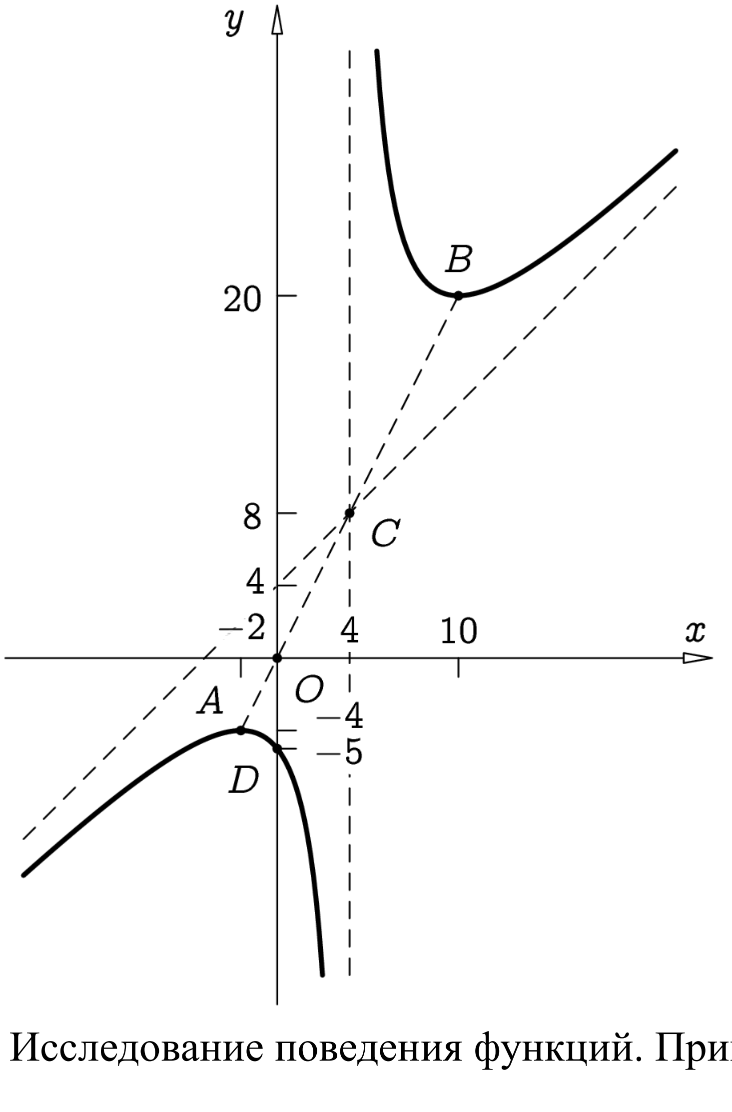

Рис.6.2. Исследование поведения функций. Пример 6.2

Пример 6.3. Резервуар, имеющий форму открытого сверху прямоугольного параллелепипеда с квадратным дном, нужно по внутренней поверхности вылудить оловом.

Каковы должны быть размеры резервуара при заданной емкости V = 108 *л*, чтобы затраты олова на его лужение были наименьшими?

Решение. Затраты на покрытие резервуара оловом будут наименьшими, если при заданной вместимости его поверхность будет минимальной.

Обозначим через a сторону основания, через b − высоту резервуара. Тогда площадь его внутренней поверхности S будет складываться из площади одного основания и четырех боковых стенок:

$$S = a^2 + 4ab.$$

Объем резервуара с квадратным днищем равен

$$V = a^2 b = 108.$$

Выразим из второго равенства высоту резервуара b и подставим ее в первое равенство: $b = \dfrac{108}{a^2}$; $S = a^2 + 4 \cdot \dfrac{108}{a}$.

Полученное соотношение устанавливает зависимость между площадью поверхности резервуара S (функция) и стороной основания a (аргумент).

Решение задачи продолжается исследованием функции $S(a)$ на экстремум. Для этого находим первую производную S', приравниваем ее к нулю и решаем полученное уравнение:

$$S'(a) = \left(a^2 + \frac{432}{a}\right)' = 2a - \frac{432}{a^2} = 2 \cdot \frac{a^3 - 216}{a^2};$$

$$S'(a) = 0 \quad \Rightarrow \quad a^3 - 216 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt[3]{216}.$$

Из последнего выражения следует, что длина основания a = 6 *дм*.

При $a > 6$, $S'(a) > 0$; при $a < 6$, $S'(a) < 0$. Следовательно, в точке $a = 6$ функция $S(a)$ имеет минимум.

Если длина основания резервуара a = 6 *дм*, то высота резервуара определяется как b = 108/36 = 3 *дм*.

Таким образом, затраты на лужение резервуара емкостью 108 *л* будут наименьшими, если он имеет размеры 6 × 6 × 3 *дм*.

ТЕМА 7. ФУНКЦИИ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Литература: [1], ч. I, гл. X, §§ 1 – 5; [3], гл. XI, §§ 1, 2, 6, 12; [5], гл. 5.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте определение функции двух независимых переменных. Приведите примеры.
2. Что называется областью определения функции двух независимых переменных? Каково геометрическое изображение функции двух независимых переменных?
3. Что называется частным и полным приращением функции двух независимых переменных?
4. Сформулируйте определение предела функции двух переменных.
5. Какая функция называется непрерывной в точке? в области?
6. Дайте определение частных производных первого порядка функции двух переменных. Каков их геометрический смысл?
7. Что называется полным дифференциалом функции двух переменных?
8. Как найти частные производные второго порядка функции двух переменных?
9. Что называется максимумом (минимумом) функции двух переменных?
10. Сформулируйте необходимое условие экстремума функции двух переменных?
11. Сформулируйте достаточный признак экстремума функции двух переменных.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

Пример 7.1. Требуется вычислить частные производные первого порядка z'_x и z'_y и найти полный дифференциал dz для указанной функции

$$z = 3e^{x^2+y^2} + 3x^2y + 8.$$

Решение. Используя таблицу основных производных и правила дифференцирования сложной функции, найдем частные производные первого порядка z'_x и z'_y для указанной функции:

$$z'_x = 3e^{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)'_x + 6xy = 6x\,e^{x^2+y^2} + 6xy = 6x\left(e^{x^2+y^2} + y\right),$$

$$z'_y = 3e^{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)'_y + 3x^2 = 6y\,e^{x^2+y^2} + 3x^2 = 3\left(2y\,e^{x^2+y^2} + x^2\right).$$

Полный дифференциал функции двух переменных $z = f\left(x;\,y\right)$ вычисляется по формуле

$$dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy\,.$$

В нашем случае

$$dz = 6x\left(e^{x^2+y^2} + y\right)dx + 3\left(2y\,e^{x^2+y^2} + x^2\right)dy\,.$$

Пример 7.2. Требуется: 1) найти стационарные точки функции $z = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ и классифицировать их; 2) найти наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области *D*, заданной системой неравенств $x \ge 0;\ x^2\big/2 \le y \le 2$.

Указание. *Все полученные линии и характерные точки изобразить на плоскости xOy.*

Решение.

1) Для нахождения стационарных точек функции вычисляем ее частные производные первого порядка:

$$z'_x = 6x^2 - 6y\,;\ z'_y = -6x + 6y\,.$$

Теперь решаем систему $\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6y = 0; \\ -6x + 6y = 0 \end{cases}$ и получаем две стационарные точки заданной функции $O(0;\ 0)$ и $M(1;\ 1)$.

Для классификации найденных стационарных точек вычисляем следующие частные производные второго порядка нашей функции: $z''_{xx} = 12x;\ z''_{xy} = -6;\ z''_{yy} = 6$. Отсюда

$$z''_{xx}(0;0) = 0 = A_1;\ z''_{xy}(0;0) = -6 = B_1;\ z''_{yy}(0;0) = 6 = C_1;$$

$$z''_{xx}(1;1) = 12 = A_2;\ z''_{xy}(1;1) = -6 = B_2;\ z''_{yy}(1;1) = 6 = C_2;$$

$$\Delta_1 = A_1 \cdot C_1 - B_1^2 = 0 \cdot 6 - (-6)^2 = -36;$$

$$\Delta_2 = A_2 \cdot C_2 - B_2^2 = 12 \cdot 6 - (-6)^2 = 72 - 36 = 36.$$

Поскольку $\Delta_1 < 0$, то точка $O(0;\ 0)$ не является точкой локального экстремума заданной функции.

Так как $\Delta_2 > 0$ и $A_2 > 0$, то точка $M(1;\ 1)$ является точкой минимума нашей функции, причем

$$z_{\min} = z(1;1) = 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 = -1.$$

2) Точки, в которых функция принимает *наибольшее* и *наименьшее* значения могут находиться как внутри области, так и на ее границе.

Первая из стационарных точек принадлежит границе области D (см. рис.7.1). Следовательно, единственной внутренней точкой заданной области, в которой функция z может принять наибольшее или наименьшее значение, является точка $M(1;\ 1)$.

Исследуем функцию на границе, которая состоит из отрезков OA, AB и дуги параболы OB.

1. На отрезке OA выполняется равенство $x = 0$, поэтому на этом отрезке функция $z_{OA} = 3y^2\ \left(0 \le y \le 2\right)$ это возрастающая функция одной переменной y. Наибольшее и наименьшее значения она принимает на концах отрезка OA.

2. На отрезке AB выполняется равенство $y = 2$, следовательно, на этом отрезке функция

$$z_{AB} = 2x^3 - 6x \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 = 2x^3 - 12x + 12\ \left(0 \le x \le 2\right)$$

представляет собой функцию одной переменной x. Наибольшее и наименьшее значения этой функции находятся среди значений в критических точках и на концах отрезка.

Исследуем полученную функцию на экстремум. Для этого найдем производную функции z'_{AB} и приравняем ее нулю

$$z'_{AB} = \left(2x^3 - 12x + 12\right)' = 6x^2 - 12 = 6\left(x^2 - 2\right) = 0.$$

Решив уравнение $z'_{AB} = 0$, находим координаты критических точек $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. Заданному условию $0 \le x \le 2$ удовлетворяет лишь одно значение $x_1 = +\sqrt{2}$. На отрезке AB ему соответствует точка $Q(\sqrt{2}; 2)$.

Итак, наибольшее и наименьшее значения функции z на отрезке AB находятся среди ее значений в точках A, B и Q.

3. На дуге параболы OB выполняется равенство $y = x^2/2$, в результате исследуемая функция имеет вид

$$z_{OB} = 2x^3 - 6x\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^4}{4} = \frac{3}{4}x^4 - x^3 \quad \left(0 \le x \le 2\right).$$

Исследуем полученную функцию на экстремум. Для этого найдем производную функции z'_{OB} и приравняем ее нулю

$$z'_{OB} = \left(\frac{3}{4}x^4 - x^3\right)' = 3x^3 - 3x^2 = 3x^2\left(x - 1\right) = 0.$$

Решив уравнение $z'_{OB} = 0$, находим координаты критических точек $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Координаты обеих найденных точек удовлетворяют заданному неравенству $0 \le x \le 2$. На дуге OB этим значениям соответствуют точки $O(0; 0)$ и $P(1; 1/2)$ соответственно.

Теперь можно утверждать, что наибольшее и наименьшее значения функции z на дуге параболы OB находятся среди ее значений в точках O, P и B.

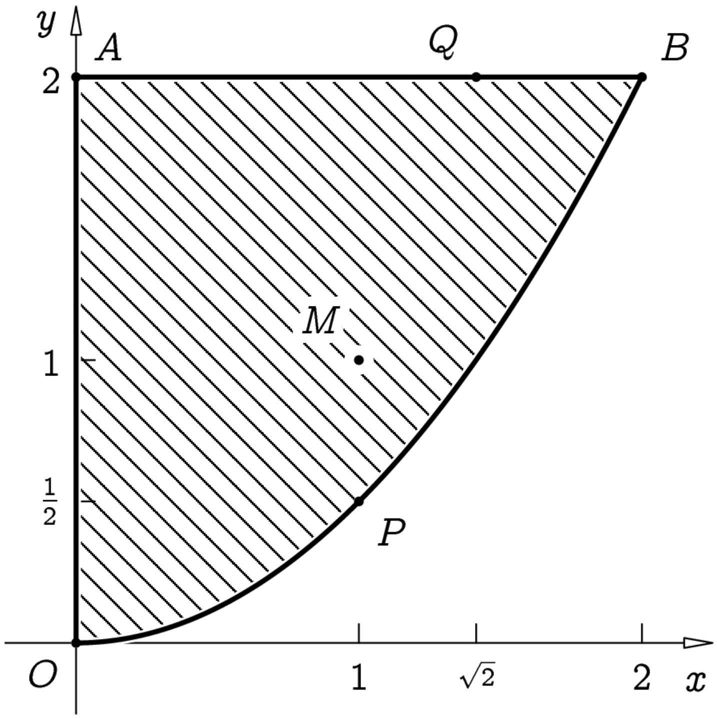

Рис.7.1. Функции многих независимых переменных. Пример 7.2

Итак, наибольшее и наименьшее значения заданной функции в замкнутой области *D* нужно искать среди ее значений в точках *O*, *A*, *B*, *M*, *P*, *Q*:

Точка	x	y	z
O	0	0	0
A	0	2	**12**
B	2	2	4
M	1	1	**−1**
P	1	1/2	−1/4
Q	$\sqrt{2}\approx 1,41$	2	$12-8\sqrt{2}\approx 0,69$

Вывод: наибольшее и наименьшее значения функции z в замкнутой области *D* следующие:

$$z_{наиб}=z(0;2)=12;\; z_{наим}=z(1;1)=-1.$$

Все полученные линии и характерные точки на плоскости xy показаны на рис.7.1.

ТЕМА 8. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Литература: [1], ч. I, гл. XI, §§ 1–6; [3], гл. VIII, §§ 1, 2, 4; [5], гл. 6.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Сформулируйте определение первообразной функции.
2. Что называется неопределенным интегралом от данной функции?
3. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла.
4. Напишите формулы из таблицы основных интегралов.
5. В чем сущность метода интегрирования с помощью замены переменной?
6. Напишите формулу интегрирования по частям для неопределенного и для определенного интегралов.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

Пример 8.1. Требуется найти методом замены переменной неопределенный интеграл $\int \frac{\ln^8 x}{x}\,dx$.

Решение. Применим замену переменной вида $t = \ln x$. В таком случае исходный интеграл может быть записан в виде

$$\int \frac{\ln^8 x}{x}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}\,dx \end{array} \right| = \int t^8\,dt .$$

В результате замены переменной получаем интеграл от степенной функции, который легко находится по таблице (см. Приложение 2). После нахождения первообразной производим обратную замену переменной $t = \ln x$

$$\int t^8\,dt = \frac{1}{9}t^9 + C = \frac{1}{9}\ln^9 x + C .$$

Пример 8.2. Требуется найти методом замены переменной неопределенный интеграл $\int x^2 e^{2x^3+3}\,dx$.

Решение. Применим замену переменной вида $t = 2x^3 + 3$. В таком случае исходный интеграл может быть записан в виде

$$\int x^2 e^{2x^3+3}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = 2x^3 + 3 \\ dt = 6x^2\,dx \\ x^2 dx = \dfrac{1}{6}\,dt \end{array} \right| = \int e^t \frac{1}{6}\,dt = \frac{1}{6}\int e^t\,dt.$$

В результате замены переменной получаем интеграл от показательной функции, который легко находится по таблице (см. Приложение 2). После нахождения первообразной производим обратную замену переменной $t = 2x^3 + 3$

$$\frac{1}{6}\int e^t\,dt = \frac{1}{6}e^t + C = \frac{1}{6}e^{2x^3+3} + C.$$

Пример 8.3. Требуется найти методом выделения полного квадрата неопределенный интеграл $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}\,dx$.

Решение. Преобразуем знаменатель дроби, стоящей под знаком интеграла, следующим образом:

$$x^2 - 4x + 8 = x^2 - 4x + 4 + 4 = (x-2)^2 + 2^2.$$

Тогда после подстановки $t = x - 2$ получим

$$\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8}\,dx = \int \frac{3x-1}{(x-2)^2+2^2}\,dx = \int \frac{3(t+2)-1}{t^2+2^2}\,dt = \int \frac{3t+5}{t^2+2^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{3t}{t^2+2^2}\,dt + \int \frac{5}{t^2+2^2}\,dt = \frac{3}{2}\ln(t^2+4) + \frac{5}{2}arctg\frac{x-2}{2} + C =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(t^2+4) + \frac{5}{2}arctg\frac{x-2}{2} + C.$$

Замечание. При вычислении интеграла $\int \frac{3t}{t^2+2^2}\,dt$ использована замена переменной $z = t^2 + 4$. Тогда $dz = 2t \cdot dt$, откуда

$$\int \frac{3t}{t^2+2^2}\,dt = \frac{3}{2}\int \frac{2t}{t^2+2^2}\,dt = \frac{3}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{3}{2}\ln|z| + C_1 = \frac{3}{2}\ln(t^2+4) + C_1.$$

ТЕМА 9. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Литература: [1], ч. I, гл. XII; [3], гл. IX, §§ 1, 2; [5], гл. 6.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Назовите задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.
2. Напишите выражение для интегральной суммы функции $y = f(x)$ на отрезке оси Ox $[a, b]$.
3. Что называется определенным интегралом функции $y = f(x)$ на отрезке оси Ox $[a, b]$?
4. Каков геометрический смысл определенного интеграла?
5. Перечислите основные свойства определенного интеграла.
6. Чему равна производная определенного интеграла с переменным верхним пределом интегрирования?
7. Напишите формулу Ньютона-Лейбница.
8. Напишите формулу интегрирования по частям в определенном интеграле.
9. Как вычислить объем тела, образованного вращением плоской фигуры вокруг оси Ox, Oy?

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

Пример 9.1. Требуется найти методом интегрирования по частям определенный интеграл $\int_0^1 \operatorname{arctg} 3x\,dx$.

Решение. Пусть $u = \operatorname{arctg} 3x$, $dv = dx$. В таком случае искомый неопределенный интеграл может быть записан в виде

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} 3x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} 3x, & dv = dx \\ du = \dfrac{3\,dx}{1+9x^2}, & v = \int dx = x \end{array} \right| = x \cdot \operatorname{arctg} 3x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{3x\,dx}{1+9x^2}.$$

Для нахождения последнего интеграла воспользуемся методом замены переменной. Пусть $t = 1 + 9x^2$. Тогда

$$\int_0^1 \frac{3x\,dx}{1+9x^2} = \left| \begin{array}{c} t = 1+9x^2 \\ dt = 18x\,dx, \quad 3x\,dx = \dfrac{1}{6}\,dt \\ t(0) = 1, \quad t(1) = 10 \end{array} \right| = \int_1^{10} \frac{1}{6}\,\frac{dt}{t}.$$

В результате замены переменной получаем интеграл, который легко находится по таблице (см. Приложение 2). После нахождения первообразной воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_1^{10} \frac{1}{6}\,\frac{dt}{t} = \frac{1}{6}\ln|t|\Big|_1^{10} = \frac{1}{6}\left(\ln 10 - \ln 1\right) = \frac{\ln 10}{6}.$$

Окончательно имеем:

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} 3x\,dx = arctg3 - \frac{1}{6}\ln 10.$$

Пример 9.2. Требуется найти площадь, ограниченную графиками функций $y = 2x^2 + \frac{1}{3}x$, $y = -\frac{2}{3}x + 3$.

Указание. *Все полученные линии и характерные точки построить в системе координат xOy.*

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения графиков заданных функций. С этой целью решим уравнение:

$$2x^2 + \frac{1}{3}x = -\frac{2}{3}x + 3,$$

$$2x^2 + x - 3 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25, \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2 \cdot 2}; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = -\frac{3}{2}.$$

Для построения графиков функций в системе координат xOy (см. рис.9.1) уточним ординаты точек их пересечения, в результате чего эти точки будут иметь вид $A(1;\ 7/3)$, $B(-3/2;\ 4)$.

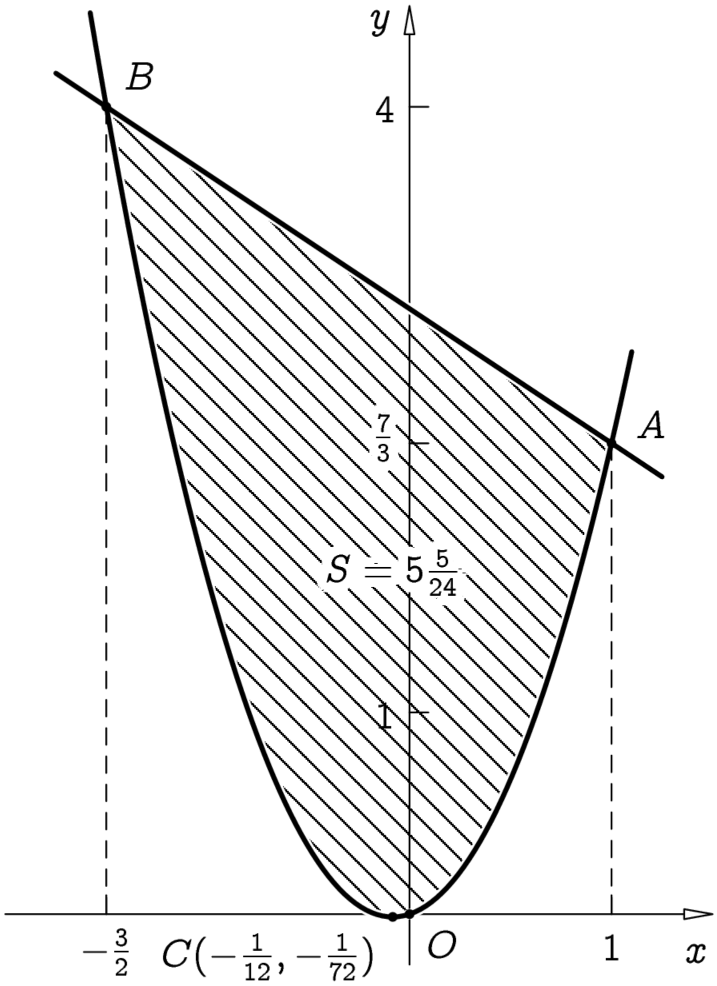

Рис.9.1. Определенный интеграл. Пример 9.2

Для вычисления искомой площади воспользуемся формулой

$$S = \int_a^b \left(y_{верх} - y_{низ} \right) dx.$$

В нашем случае

$$S = \int_{-3/2}^{1} \left((-\frac{2}{3}x + 3) - (2x^2 + \frac{1}{3}x) \right) dx =$$

$$= \int_{-3/2}^{1} \left(-2x^2 - x + 3 \right) dx = \left(-\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x \right) \Bigg|_{-3/2}^{1} =$$

$$=\left(-\frac{2}{3}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot 1+3\cdot 1\right)-\left(+\frac{2}{3}\cdot\frac{27}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4}-3\cdot\frac{3}{2}\right)\approx 5,208.$$

Построение всех полученных линий и характерных точек в системе координат *xOy* показано на рис.9.1.

ТЕМА 10. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Литература: [1], ч. I, гл. XIII, §§ 1–4, 6; [3], гл. XII, §§ 1–3; [5], гл. 7.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какое уравнение называется дифференциальным? Как определяется порядок дифференциального уравнения?
2. Что называется общим решением дифференциального уравнения? частным решением?
3. Каков геометрический смысл общего и частного решений дифференциального уравнения первого порядка?
4. Приведите примеры дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.
5. Какое дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным? Укажите способ его решения.
6. Каков вид линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
7. Какую структуру имеет общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
8. Напишите формулу общего решения линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в зависимости от корней характеристического уравнения.
9. Укажите вид частного решения линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида $e^{\alpha x}\cdot P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен степени $n\ge 0$.

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ

Пример 10.1. Требуется найти частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка $xy' - y = -2\ln x$, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(1) = 0{,}2$.

Решение. Разделим обе части уравнения на x и представим искомое общее решение в виде произведения двух новых неизвестных функций: $y = u(x)\cdot v(x)$. В таком случае исходное дифференциальное уравнение может быть записано в виде

$$u'\cdot v + u\cdot v' - \frac{u\cdot v}{x} = -\frac{2\ln x}{x}$$

или

$$v\cdot\left[u' - \frac{u}{x}\right] + u\cdot v' = -\frac{2\ln x}{x} \qquad (10.1)$$

Выберем функцию $u(x)$ так, чтобы квадратная скобка в последнем уравнении равнялась нулю. Это означает, что

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{x} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \quad\Rightarrow\quad \ln u = \ln x \quad\Rightarrow\quad u = x.$$

Замечание. При интегрировании последнего уравнения произвольную постоянную положили равной нулю ($C = 0$) и пренебрегли знаками модуля у аргументов логарифмических функций, так как для наших целей достаточно найти лишь одно из частных решений этого уравнения.

Подставим полученное решение в уравнение (10.1). В таком случае будем иметь

$$x\cdot\frac{dv}{dx} = -\frac{2\ln x}{x} \quad\Rightarrow\quad dv = -\frac{2}{x^2}\ln x.$$

Последнее уравнение представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Функцию $v(x)$ определим в результате интегрирования по частям

$$v = 2\int -\frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, & dv = -\dfrac{dx}{x^2} \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = \dfrac{1}{x} \end{matrix} \right| =$$

$$= 2\left(\frac{\ln x}{x} - \int \frac{dx}{x^2}\right) = 2\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right) + C = \frac{2}{x}\left(\ln x + 1\right) + C\,.$$

Таким образом, общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка имеет вид

$$y = u(x)\cdot v(x) = 2\left(\ln x + 1\right) + C\,x\,.$$

Для нахождения частного решение получим соответствующее ему значение C из полученного общего решения, используя заданное начальное условие $y(1) = 0{,}2$:

$$0{,}2 = 2\left(\ln 1 + 1\right) + C\cdot 1 \quad \Rightarrow \quad C = -1{,}8\,.$$

В результате, искомое частное решение исходного линейного дифференциального уравнения имеет вид

$$y = 2\left(\ln x + 1\right) - 1{,}8\,x = 2\ln x - 1{,}8x + 2\,.$$

Пример 10.2.

1. Требуется найти частные решения следующих дифференциальных уравнений второго порядка при заданных начальных условиях:

1) $y'' - 6y' + 8y = 0;$ $\quad y(0) = 1;$ $\quad y'(0) = 2;$

2) $y'' - 8y' + 16y = 0;$ $\quad y(0) = 2;$ $\quad y'(0) = 5;$

3) $y'' - 4y' + 13y = 0;$ $\quad y(\pi) = 0;$ $\quad y'(\pi) = 1.$

Решение.

1) Характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 8 = 0$ имеет два различных вещественных корня $k_1 = 2,\ k_2 = 4$, поэтому общее решение этого дифференциального уравнения записывается в виде

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x},$$

где $C_1,\ C_2$ – произвольные постоянные. Отсюда

$$y'(x) = 2C_1 e^{2x} + 4C_2 e^{2x},$$

поэтому, основываясь на начальных условиях, получаем

$$C_1 e^{2\cdot 0} + C_2 e^{4\cdot 0} = 1,$$

т.е.

$$C_1 + C_2 = 1$$

и

$$2C_1e^{2\cdot 0}+4C_2e^{4\cdot 0}=2,\text{ т.е. } 2C_1+4C_2=2.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} C_1+C_2=1, \\ C_1+2C_2=1, \end{cases}$$

получаем $C_1=1$, $C_2=0$. Частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, приобретает вид

$$y=e^{2x}.$$

2) Характеристическое уравнение

$$k^2-8k+16=0$$

имеет два равных корня $k_1=k_2=4$, поэтому общее решение соответствующего дифференциального уравнения записывается в виде

$$y=C_1e^{4x}+C_2xe^{4x},$$

откуда

$$y'(x)=4C_1e^{4x}+C_2e^{4x}+4C_2xe^{4x}.$$

Учитывая начальные условия, получаем систему уравнений для определения C_1, C_2:

$$\begin{cases} C_1+C_2=2, \\ 4C_1+C_2=5. \end{cases}$$

Отсюда $C_1=1$; $C_2=1$, поэтому искомое частное решение имеет вид

$$y=e^{4x}+xe^{4x}=e^{4x}(x+1).$$

3) Характеристическое уравнение

$$k^2-4k+13=0$$

не имеет вещественных корней. В этом случае общее решение соответствующего дифференциального уравнения записывается в виде

$$y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

где $\alpha=-\frac{p}{2}$, $\beta=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$ (p, q – коэффициенты характеристического уравнения).

У нас $\alpha=2$, $\beta=3$, поэтому общее решение заданного дифференциального уравнения имеет вид

$$y=C_1e^{2x}\cos 3x+C_2e^{2x}\sin 3x.$$

Отсюда

$$y'(x)=2C_1e^{2x}\cos 3x-3C_1e^{2x}\sin 3x+2C_2e^{2x}\sin 3x+3C_2e^{2x}\cos 3x.$$

Таким образом, для определения значений C_1, C_2, исходя из начальных условий, получаем систему уравнений

$$\begin{cases}-C_1e^{2\pi}=0,\\ -2C_1e^{2\pi}-3C_2e^{2\pi}=1,\end{cases}$$

решая которую, имеем $C_1=0$, $C_2=-\frac{1}{3}e^{-2\pi}$.

Итак, искомое частное решение приобретает вид

$$y(x)=-\frac{1}{3}e^{-2\pi}e^{2x}\sin 3x=-\frac{1}{3}e^{2(x-\pi)}\sin 3x.$$

2. Требуется найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y''-y'-6y=(2x-1)e^{3x}$.

Решение. Найдем общее решение y_{oo} линейного однородного уравнения с теми же коэффициентами, что и в левой части заданного:

$$y''-y'-6y=0.$$

Так как корни его характеристического уравнения $k^2-k-6=0$ действительны и различны ($k_1=-2$; $k=3$), то общее решение однородного уравнения записывается в виде

$$y_{oo}=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Подбираем теперь частное решение исходного неоднородного уравнения в виде

$$y_{чн} = x(Ax+B)e^{3x} = (Ax^2+Bx)e^{3x}.$$

Отсюда

$$y_{чн} = (2Ax+B)e^{3x} + (Ax^2+Bx)\cdot 3e^{3x}.$$

$$y_{чн} = 2Ae^{3x} + (2Ax+B)\cdot 3e^{3x} + (2Ax+B)\cdot 3e^{3x} + \\ + (Ax^2+Bx)\cdot 9e^{3x}.$$

Подставляя $y_{чн}$, $y'_{чн}$ $y''_{чн}$ в исходное уравнение и сокращая все слагаемые на множитель $e^{3x} \neq 0$, получаем

$$2A + 6(2Ax+B) + 9(Ax^2+Bx) - (2Ax+B) - 3(Ax^2+Bx) - \\ -6(Ax^2+Bx) = 2x-1$$

или, после упрощения, $10Ax + 2A + 5B = 2x - 1$.

Отсюда следуют равенства

$$10A = 2,\ 2A+5B = -1, \text{ т.е. } A = \frac{1}{5},\ B = \frac{7}{25}.$$

Таким образом, общее решение $y(x)$ заданного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x) = y_{оо} + y_{чн} = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x} + (\frac{1}{5}x^2 - \frac{7}{25}x)e^{3x}.$$

ТЕМА 11. РЯДЫ

Литература: [5], гл.8.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какой ряд называется сходящимся (расходящимся)?
2. Сформулируйте необходимое условие сходимости ряда.
3. Сформулируйте признак сравнения знакоположительных рядов.
4. В чем состоит признак Даламбера?
5. Для каких рядов применяется признак Лейбница? В чем его сущность?
6. Как найти радиус сходимости степенного ряда?
7. Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании степенного ряда.
8. Как вычисляются коэффициенты ряда Маклорена для заданной функции?

9. Напишите разложение в ряд Маклорена функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$, $(1+x)^n$.

РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ПРИМЕРА

Пример 11.1. Вычислить с точностью до 0,001 интеграл $\int\limits_0^{0,5} x^2 e^{-x^2} dx$ путем предварительного разложения подынтегральной функции в степенной ряд и почленного интегрирования этого ряда.

Решение. В разложении функции e^x в степенной ряд, которое имеет вид

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots \quad (-\infty < x < +\infty),$$

заменим x на $-x^2$. Тогда получим

$$e^{-x^2} = 1 + \frac{1}{1!}(-x^2) + \frac{1}{2!}(-x^2)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(-x^2)^n + \ldots$$

Умножая этот ряд почленно на x^2, будем иметь

$$x^2 e^{-x^2} = x^2 - \frac{1}{1!}x^4 + \frac{1}{2!}x^6 - \frac{1}{3!}x^8 + \ldots$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^{0,5} x^2 e^{-x^2} dx = \int\limits_0^{0,5} \left[x^2 - \frac{1}{1!}x^4 + \frac{1}{2!}x^6 - \frac{1}{3!}x^8 + \ldots \right] dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{1!}\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2!}\frac{x^7}{7} - \ldots \right) \Bigg|_0^{0,5} = \frac{1}{24} - \frac{1}{160} + \frac{1}{1729} - \ldots$$

Полученный числовой знакочередующийся ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница. Третий член этого ряда по абсолютной величине меньше $0{,}001$. Поэтому для обеспечения требуемой точности нужно просуммировать лишь первые два члена ряда, округлив итоговый результат в соответствии с заданной точностью:

$$\int\limits_0^{0,5} x^2 e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{24} - \frac{1}{160} \approx 0{,}048.$$

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

В задачах №№ 1–10 требуется решить заданную систему уравнений *а)* по формулам Крамера, *б)* с помощью обратной матрицы и сделать проверку полученного решения.

1. $\begin{cases} 4x-2y+2z=12; \\ 2x+5y-2z=12; \\ 3x+7y-z=21. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x-6y=-2; \\ 2x+y-z=5; \\ -2x-y-2z=1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x+4y+4z=21; \\ 6x+5y-7z=-10; \\ 7x-2y-z=2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 8x+5y+2z=30; \\ -x+6y-2z=21; \\ -2x+y+z=3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} -x+3y-z=1; \\ 2x-y+5z=6; \\ 3x+4y+z=8. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4x+6y=2; \\ 2x-y+z=7; \\ -2x+1y+2z=-1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} -3x+4y-7z=-6; \\ 2x+5y-z=8; \\ 6x+y+4z=10. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 4x-y+2z=5; \\ 2x+5y-z=-3; \\ 3x+7y-z=-4. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x+3y-z=3; \\ -x+2y-4z=5; \\ x+3y+2z=5. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x+y-z=-3; \\ -x+2y+3z=6; \\ x-y+4z=2. \end{cases}$

В задачах №№ 11–20 даны координаты вершин треугольника *ABC*.

Требуется:

1) вычислить длину стороны *AB*, составить уравнения сторон *AB* и *BC* и вычислить их угловые коэффициенты;
2) вычислить внутренний угол при вершине *B* в радианах с точностью до 0,01;
3) составить уравнение медианы *AE*;
4) составить уравнение и вычислить длину высоты *CD*;

5) составить уравнение прямой, проходящей через точку E параллельно стороне AB и определить точку M ее пересечения с высотой CD;
6) составить уравнение окружности с центром в точке E, проходящей через вершину C;
7) все полученные линии и характерные точки построить в системе координат xOy.

11.	$A(-2; +1)$;	$B(+3; +7)$;	$C(+8; +4)$.
12.	$A(0; -3)$;	$B(+5; +3)$;	$C(+10; 0)$.
13.	$A(-4; +1)$;	$B(+1; +7)$;	$C(+6; +4)$.
14.	$A(-1; +1)$;	$B(+4; +7)$;	$C(+9; +4)$.
15.	$A(0; -4)$;	$B(+5; +2)$;	$C(+10; -1)$.
16.	$A(-6; +1)$;	$B(-1; +7)$;	$C(+4; +4)$.
17.	$A(+1; -1)$;	$B(+6; +5)$;	$C(+11; +2)$.
18.	$A(-2; +2)$;	$B(+3; +8)$;	$C(+8; +5)$.
19.	$A(-7; -1)$;	$B(-2; +5)$;	$C(+3; +2)$.
20.	$A(-2; -6)$;	$B(+3; 0)$;	$C(+8; -3)$.

В задачах №№ 21 – 30 требуется составить уравнение линии, для каждой точки $M(x, y)$ которой известно, что ее расстояния до точки A и до прямой $y = C$ равны друг другу. Все полученные линии и характерные точки построить в системе координат xOy.

21.	$A(-4; -2)$;	$y = -1$.
22.	$A(+6; -5)$;	$y = -3$.
23.	$A(+4; -1)$;	$y = +2$.
24.	$A(-3; +1)$;	$y = +3$.
25.	$A(-5; +4)$;	$y = 0$.
26.	$A(+4; +6)$;	$y = +4$.
27.	$A(-6; -5)$;	$y = -4$.

28. $A(+5; -3)$; $y = +3$.

29. $A(-7;\ 0)$; $y = +1$.

30. $A(+2; +1)$; $y = +3$.

В задачах №№ 31 – 40 даны координаты вершин пирамиды *ABCD*.

Требуется:

1) записать векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ в системе орт $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ и найти модули этих векторов;
2) найти угол между векторами $\overline{AB}$, $\overline{AC}$;
3) найти проекцию вектора $\overline{AD}$ на вектор $\overline{AB}$;
4) найти площадь грани *ABC*;
5) найти объем пирамиды *ABCD*;
6) составить уравнения ребра *AC* и грани *ABC*.

31. $A(+1;\ 0; +3)$; $B(-5; -2; +1)$; $C(+2; -4; +5)$; $D(+4; +7; -5)$.

32. $A(+1; -1; +1)$; $B(-5; -3; -1)$; $C(+2; -5; +3)$; $D(+4; +6; -7)$.

33. $A(+1; -2; +2)$; $B(-5; -4;\ 0)$; $C(+2; -6; +4)$; $D(+4; +5; -6)$.

34. $A(+1; -2; +1)$; $B(-5; -4; -1)$; $C(+2; -6; +3)$; $D(+4; +5; -7)$.

35. $A(+1;\ 0; +1)$; $B(-5; -2; -1)$; $C(+2; -4; +3)$; $D(+4; +7; -7)$.

36. $A(+2; -1; +2)$; $B(-4; -3;\ 0)$; $C(+3; -5; +4)$; $D(+5; +6; -6)$.

37. $A(+3;\ 0; +3)$; $B(-3; -2; +1)$; $C(+4; -4; +5)$; $D(+6; +7; -5)$.

38. $A(+3; -1; +1)$; $B(-3; -3; -1)$; $C(+4; -5; +3)$; $D(+6; +6; -7)$.

39. $A(+3; -2; +2)$; $B(-3; -4;\ 0)$; $C(+4; -6; +4)$; $D(+6; +5; -6)$.

40. $A(+3;\ 0; +1)$; $B(-3; -2; -1)$; $C(+4; -4; +3)$; $D(+6; +7; -7)$.

В задачах №№ 41 – 50 требуется найти указанные пределы.

41. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2 + x - 6}{-5x + 3x^2 - 3}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2 \cdot \cos 4x}{\cos x \cdot \sin^2 2x}$.

42. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-3x-6}{-5x^2-2x+4}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot\sin x}{\operatorname{tg}3x\cdot\sin 4x}$.

43. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x^2+7x+5}{-5x+8x^2+7}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x\cdot\sin^2 x}{2x\cdot\operatorname{tg}3x}$.

44. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-5x^2+2x+7}{3-x-x^2}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 4x\cdot\sin x}{3x^3\cdot\cos 2x}$.

45. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2-9x+4}{x^2-6x+1}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\cdot\sin 2x}{4x\cdot\cos 3x}$.

46. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-3x+5}{8x-5x^2-6}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin 2x}{\operatorname{tg}^2 3x\cdot\cos 4x}$.

47. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x^2+4x-7}{7-3x+9x^2}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cdot\operatorname{tg}3x}{\sin^2 4x\cdot\cos 5x}$.

48. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-6x^2-4x+7}{x^2-9x-1}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\cdot\sin^2 3x}{\operatorname{tg}x\cdot\sin^2 2x}$.

49. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+6x+7}{6+7x+8x^2}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x\cdot\operatorname{tg}4x}{\sin^2 3x\cdot\cos 2x}$.

50. *а*) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-9x^2-6x+8}{-4x^2+5x-3}$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x\cdot\operatorname{tg}^2 x}{\sin^2 2x\cdot\cos 3x}$.

В задачах №№ 51–60 требуется найти производные dy/dx от заданных функций, пользуясь основными правилами и формулами дифференцирования.

51. *а*) $y=\operatorname{ctg}(5x-1)\cdot e^{6x}$; *б*) $y=\dfrac{\ln x}{\sin^4 x}$.

52. *а*) $y=(\arcsin 5x)\cdot\sqrt{2-25x^2}$; *б*) $y=\dfrac{\operatorname{tg}x^3}{4-5x^2}$.

53. *а*) $y = 2e^{x} \cdot \sin^{2} x$; *б*) $y = \dfrac{\arccos(3-x)}{\sin 3x}$.

54. *а*) $y = e^{\sqrt[4]{x}} \cdot \operatorname{arctg} x$; *б*) $y = \dfrac{\cos \ln x}{x^{2}}$.

55. *а*) $y = \left(x^{4} - 6^{x}\right) \cdot \sin 3x$; *б*) $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x^{2}}{5x^{2} + e^{x}}$.

56. *а*) $y = \sqrt[5]{x^{4}} \cdot \operatorname{arctg}^{6} x$; *б*) $y = \dfrac{\sin 5x}{\ln(2x^{3} - 3)}$.

57. *а*) $y = \left(6x^{5} + 3^{x}\right) \cdot e^{\sin x}$; *б*) $y = \dfrac{tg^{2} x}{\operatorname{arctg} x^{2}}$.

58. *а*) $y = 2^{\sin x} \cdot \operatorname{tg}\left(x - 1\right)$; *б*) $y = \dfrac{\arcsin 2x}{x^{3} + e^{x}}$.

59. *а*) $y = \sin 2x \cdot \arccos \dfrac{x}{2}$; *б*) $y = \dfrac{\ln 3x}{\cos^{3} x}$.

60. *а*) $y = \left(x^{7} - 2\right) \cdot e^{4x}$; *б*) $y = \dfrac{\arccos 6x}{\sqrt{1 - 4x^{3}}}$.

В задачах №№ 61 – 70 требуется, используя методы дифференциального исчисления, провести исследование заданных функций и на основании полученных данных построить их графики.

Указание: *исследование функции* $y = f(x)$ *рекомендуется проводить по следующей схеме:*

1) найти область определения функции;
2) исследовать функцию на непрерывность и найти асимптоты графика функции;
3) найти интервалы возрастания, убывания функции и точки ее экстремума;
4) найти интервалы выпуклости, вогнутости графика функции и точки перегиба;

6) найти точки пересечения графика функции с осями координат (когда это возможно) и составить таблицу дополнительных точек;
7) построить график функции $y = f(x)$ в системе координат xOy на основании полученных данных.

61. *а*) $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 6$; *б*) $y = \dfrac{x^2 + 16}{x + 3}$.

62. *а*) $y = 4x^3 - 15x^2 + 12x + 24$; *б*) $y = \dfrac{x^2 - 12}{x - 4}$.

63. *а*) $y = 4x^3 + 9x^2 - 12x + 6$; *б*) $y = \dfrac{x^2 + 24}{x + 1}$.

64. *а*) $y = x^3 - 9x^2 + 24x + 3$; *б*) $y = \dfrac{x^2 + 32}{x - 2}$.

65. *а*) $y = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 9$; *б*) $y = \dfrac{x^2 + 27}{x + 3}$.

66. *а*) $y = 5x^3 + 3x^2 - 9x - 7$; *б*) $y = \dfrac{x^2 + 5}{x + 2}$.

67. *а*) $y = 5x^3 - 3x^2 - 9x + 6$; *б*) $y = \dfrac{x^2 - 5}{x - 3}$.

68. *а*) $y = x^3 + 4x^2 - 3x + 4$; *б*) $y = \dfrac{x^2 - 15}{x + 4}$.

69. *а*) $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 12$; *б*) $y = \dfrac{x^2 + 8}{x + 1}$.

70. *а*) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 18$; *б*) $y = \dfrac{x^2 + 21}{x - 2}$.

В задачах №№ 71–80 требуется найти решение, удовлетворяющее приведенным условиям.

Указание: *для поиска решения необходимо составить целевую функцию и, используя методы дифференциального исчисления, исследовать ее на экстремум.*

71. Найти длины катетов и гипотенузы прямоугольного треугольника наибольшей площади, если сумма длин одного из его катетов и гипотенузы постоянна и равна 4 *см*.

72. Какое положительное число, просуммированное с обратным ему числом, дает наименьшую сумму?

73. Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен 72 $см^3$, причем стороны основания относились бы как $1:2$. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность ящика была наименьшей?

74. Число 8 разбить на два слагаемых так, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

75. Проволока длиной 40 см согнута в прямоугольник. Каковы должны быть размеры этого прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

76. Найти наибольший объем цилиндра, у которого площадь полной поверхности равна 24π ($см^2$).

77. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 *см*. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?

78. Найти наибольший объем конуса, образующая которого имеет длину $l = \sqrt{3}$ *см*.

79. Из прямоугольного листа жести размером 24×9 *см* требуется изготовить открытую коробку, вырезая по углам листа равные квадраты и загибая оставшиеся боковые полосы под прямым углом. Какова должна быть сторона вырезаемых квадратов, чтобы вместимость коробки была наибольшей?

80. Число 8 разбить на два слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

В задачах №№ 81 – 90 требуется вычислить частные производные первого порядка z'_x, z'_y и найти полный дифференциал dz для указанной функции $z = f(x, y)$.

81. $z = x^5 \sin y - x y^6 + \sqrt{3x^2 + 7y}$.

82. $z = xy^6 - 5x^8 y^2 + 6y + \ln\left(9x + y^3\right)$.

83. $z = 2x^4 y^2 + 7x y^3 + 12y + 6\sqrt{x^2 y + 5y}$.

84. $z = 4x^3 y + 3x^2 y^4 + 2y + 9\cos\left(xy^6 + 8x\right)$.

85. $z = 5x^2 y - y^3 + 7x - \sin\left(xy + x^2\right)$.

86. $z = 2x^9 y^2 - x\, 7^y + 6\ln\left(4x^2 + y^5\right)$.

87. $z = x\, 4^y + 3x^5 y - 9\sin\left(x^2 + 8y^2\right)$.

88. $z = x^5 + x^9 y^3 - 7\cos\left(x^3 + 9y\right)$.

89. $z = 17x^3 + y - 2x^9 y^4 + 3\sqrt{2x + y^5}$.

90. $z = e^{y/x} + 6x^3 y^5 + 4\left(x^3 + y\right)$.

В задачах №№ 91–100 задана функция двух аргументов $z = f(x; y)$. Требуется: 1) исследовать функцию на локальный экстремум; 2) найти наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области *D*, заданной системой неравенств $0 \le x \le 3$, $0 \le y \le 3$.

Область *D* и характерные точки изобразить на плоскости *xOy*.

91. $z = 8x^2 - xy + 2y^2 - 16x + y - 1$.

92. $z = x^2 + xy + y^2 - 7x - 8y + 10$.

93. $z = 2x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 16y + 3$.

94. $z = x^2 - xy + y^2 - 0{,}5x - 2y + 15$.

95. $z = -2x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x - 2y + 5$

96. $z = 3x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y - 3.$

97. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y - 2.$

98. $z = 2x^2 - xy + y^2 - 3x - y + 1.$

99. $z = 4x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 4y + 1.$

100. $z = 0{,}5x^2 + xy + y^2 - x - 2y + 8.$

В задачах №№ 101–110 требуется найти неопределенные интегралы методом замены переменной.

101. *а*) $\int \frac{5 + \ln x}{x}\, dx$; *б*) $\int x^2 \sqrt{4 + x^3}\, dx.$

102. *а*) $\int \frac{6 \ln x - 8}{x}\, dx$; *б*) $\int \frac{10x - 9}{5x^2 - 9x + 2}\, dx.$

103. *а*) $\int \arcsin^3 x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$; *б*) $\int \sqrt{7 \ln x - 2}\, \frac{dx}{x}.$

104. *а*) $\int \frac{dx}{8x + 19}$; *б*) $\int \sin^5 x \cdot \cos x\, dx.$

105. *а*) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1 - x^2}}\, dx$; *б*) $\int \frac{x^4}{3 - 2x^5}\, dx.$

106. *а*) $\int \arcsin 5x \cdot \frac{dx}{\sqrt{1 - 25x^2}}$; *б*) $\int \sqrt[4]{9 - 7x}\, dx.$

107. *а*) $\int 2x \cdot \left(6x^2 - 16\right)^{11} dx$; *б*) $\int \sqrt[3]{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{dx}{1 + x^2}.$

108. *а*) $\int x \sqrt{0{,}3 - 0{,}4x^2}\, dx$; *б*) $\int 6x^2 e^{2x^3 + 6}\, dx.$

109. $a)\ \int \frac{dx}{7x\cdot \ln^3 x}$; $\quad$ $б)\ \int 2x\sqrt{6+7x^2}\,dx$.

110. $a)\ \int \left(4+\operatorname{arctg} x\right)^7 \cdot \frac{dx}{1+x^2}$; $\quad$ $б)\ \int x\,e^{3x^2-1}\,dx$.

В задачах №№ 111–120 требуется найти неопределенный интеграл методом выделения полного квадрата.

111. $\int \frac{4x-3}{x^2-8x+11}\,dx.$

112. $\int \frac{x+8}{x^2+2x+12}\,dx.$

113. $\int \frac{7x+6}{x^2+10x+11}\,dx.$

114. $\int \frac{4x-1}{x^2+4x+1}\,dx.$

115. $\int \frac{9x-1}{x^2-12x+7}\,dx.$

116. $\int \frac{7x-3}{x^2-4x+5}\,dx.$

117. $\int \frac{7x+3}{x^2+6x+10}\,dx.$

118. $\int \frac{8x-7}{x^2+10x+28}\,dx.$

119. $\int \frac{10x-7}{x^2-16x+68}\,dx.$

120. $\int \frac{11x-3}{x^2-8x+20}\,dx.$

В задачах №№ 121–130 требуется найти определенный интеграл методом интегрирования по частям.

121. $\int\limits_0^2 \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\,dx$.

122. $\int\limits_0^1 \left(4+5x\right)e^{3x}\,dx$.

123. $\int\limits_{1/6}^{e/6} \left(\frac{x}{2}+3\right)\ln 6x\,dx$.

126. $\int\limits_0^1 \left(6x-5\right)e^{2x}\,dx$.

127. $\int\limits_{1/9}^{4/9} \sqrt{x}\,\ln 9x\,dx$.

128. $\int\limits_0^{\pi/2} \left(3x+2\right)\sin 2x\,dx$.

124. $\int\limits_0^{\pi/3} (5-2x)\cos 3x\,dx$.

125. $\int\limits_0^{\pi/4} \left(1-\frac{x}{2}\right)\sin 4x\,dx$.

129. $\int\limits_1^{e} (4x-3)\ln x\,dx$.

130. $\int\limits_0^{3\pi} (x-8)\cos\frac{x}{3}\,dx$.

В задачах №№ 131–140 требуется найти площадь, ограниченную графиками заданных функций.

131. $y=\frac{1}{3}x^2+x-2$; $y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$.

132. $y=-\frac{3}{2}x^2+2$; $y=3x+2$.

133. $y=x^2+2x-1$; $y=x+5$.

134. $y=x^2-2x-3$; $y=-3x-1$.

135. $y=-x^2+3x+1$; $y=-2x+1$.

136. $y=-x^2+x-3$; $y=-5x-3$.

137. $y=x^2+2x-3$; $y=-x+1$.

138. $y=\frac{1}{2}x^2-2x+2$; $y=\frac{3}{2}x-4$.

139. $y=-\frac{1}{2}x^2-x$; $y=-\frac{3}{2}x-1$.

140. $y=-x^2-3x+1$; $y=3x+1$.

В задачах №№ 141–150 требуется найти частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка

$y' + p(x)y = q(x)$, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$.

141. $y' - 4xy = (x+1)e^{2x^2}; \quad y(0) = \frac{3}{4}.$

142. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}; \quad y(0) = 5.$

143. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2; \quad y(-2) = 5.$

144. $xy' + 2y = \frac{1}{x}; \quad y(1) = 3.$

145. $y'\cos x - 2y\sin x = 2; \quad y(0) = 2.$

146. $y'\cos x + y\sin x = 1; \quad y(0) = 2.$

147. $y' - y\sin x = e^{-\cos x}\sin 2x; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3.$

148. $y' + y = \frac{e^{-x}}{1+x^2}; \quad y(0) = 2.$

149. $xy' - 3y = x^4 e^x; \quad y(1) = e.$

150. $xy' + y = \frac{2x}{1+x^2}; \quad y(1) = 0.$

В задачах №№ 151 – 160 требуется найти

а) частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, удовлетворяющее заданным начальным условиям;

б) общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

151. а) $y'' + 8y' + 7y = 0$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 1$;
б) $y'' - 6y' + 8y = 3e^{4x}$.

152. а) $y'' - 6y' + 9y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$;

б) $y'' + 8y = (x-1)e^{2x}$.

153. а) $y'' - 7y' + 6y = 0$; $y(0) = 2$; $y'(0) = 0$;

б) $y'' - 4y' - 5y = e^{-x}(2-x)$.

154. а) $y'' - 7y' + 12y = 0$; $y(0) = 2$; $y'(0) = -2$;

б) $y'' + y' - 2y = (x+2)e^{-2x}$.

155. а) $y'' + 9y' = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = -3$;

б) $y'' + 2y' - 8y = (3x+1)e^{2x}$.

156. а) $y'' - 3y' + 2y = 0$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$;

б) $y'' + 7y' = 2x^2 + x$.

157. а) $y'' - 2y' + 5y = 0$; $y(0) = -1$; $y'(0) = 0$;

б) $y'' + 3y' - 10y = 2x^2 e^x$.

158. а) $y'' - 4y' + 4y = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 3$;

б) $y'' + 2y' - 3y = -2e^{3x}$.

159. а) $y'' - 5y' + 6y = 0$; $y(0) = 5$; $y'(0) = 0$;

б) $y'' - y' = 8x^2 e^x$.

160. а) $y'' + 3y' = 0$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$;

б) $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$.

В задачах №№ 161 – 170 требуется вычислить с точностью до 0,001 определенный интеграл путем предварительного разложения подынтегральной функции в степенной ряд и почленного интегрирования этого ряда.

161. $\int\limits_0^{0,33} x \ln(1+\sqrt{x})dx$.

166. $\int\limits_0^{0,25} \sqrt{x} \cdot \sin 4x dx$.

162. $\int\limits_{0}^{0,25} \sqrt{x}\cos 2x dx$.

163. $\int\limits_{0}^{0,25} x^3 e^{-x^2} dx$.

164. $\int\limits_{0}^{0,25} \sqrt{x}\cdot \sin 3x dx$.

165. $\int\limits_{0}^{0,2} x^2 e^{-x^3} dx$.

167. $\int\limits_{0}^{0,11} \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} dx$.

168. $\int\limits_{0}^{0,5} x \cdot \sin(x^2) dx$.

169. $\int\limits_{0}^{1} x^4 e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$.

170. $\int\limits_{0}^{0,25} \sqrt{x}\cdot \sin\frac{x}{2} dx$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица производных основных элементарных функций
и правил дифференцирования

1.	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad \forall n;$	$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$
2.	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a;$	$(e^x)' = e^x.$
3.	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a};$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}.$
4.	$(\sin x)' = \cos x;$ $(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$	$(\cos x)' = -\sin x;$ $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$
5.	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$ $(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2};$	$(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}};$ $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$
6.	*а*) $c' = 0 \ (c = const);$ *в*) $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$ *г*) $[k \cdot f(x)]' = k \cdot f'(x);$ *д*) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2};$ *е*) если задана сложная функция $y = f(u)$, где $u = g(x)$, т.е. $y = f\left(g\left(x\right)\right)$, и каждая из функций $y = f(u)$, $u = g(x)$ дифференцируема по своему аргументу, то $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} \quad ([f(g(x))]' = f'[(g(x)] \cdot g'(x)).$	*б*) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x);$

Приложение 2

Таблица неопределенных интегралов

1.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \forall n \neq -1;$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$
2.	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C.$	
3.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$	$\int e^x dx = e^x + C.$
4.	$\int \sin x dx = -\cos x + C.$	
5.	$\int \cos x dx = \sin x + C.$	
6.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$	
7.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$	
8.	$\int \operatorname{tg} x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C.$	
9.	$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C.$	
10.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$
11.	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C;$	$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$
12.	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left\lvert\frac{a + x}{a - x}\right\rvert + C.$	
13.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C.$	

ОГЛАВЛЕНИЕ

Программа курса «Математика»...		3
Библиографический список ....………		7
Общие методические указания...		8
Тема 1.	Элементы линейной алгебры ……………………...	9
Тема 2.	Аналитическая геометрия на плоскости …………	12
Тема 3.	Векторная алгебра и аналитическая геометрия в пространстве ………..	19
Тема 4.	Введение в анализ функции одной независимой переменной ………………….....	24
Тема 5.	Производная и дифференциал функции одной независимой переменной …………………..	25
Тема 6.	Исследование поведения функций ………………..	27
Тема 7.	Функции двух независимых переменных ………..	35
Тема 8.	Неопределенный интеграл ………………………...	40
Тема 9.	Определенный интеграл …………………………...	42
Тема 10.	Дифференциальные уравнения …………………...	45
Тема 11.	Ряды …………………………………………………	50
ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ………………..		52
Приложение 1.	Таблица производных основных элементарных функций и правил дифференцирования ……………………	66
Приложение 2.	Таблица неопределенных интегралов …...	67

Учебное издание

Составители:
Дементьев Сергей Николаевич
Москалев Павел Валентинович
Чесноков Александр Сергеевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
Учебно-методическое пособие
для студентов заочной формы обучения по направлению
09.03.03 – «Прикладная информатика»
профиль – «Прикладная информатика в менеджменте»

Издается в авторской редакции

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I».

Типография ФГБОУ ВПО ВГАУ 394087, Воронеж, ул. Мичурина, 1