П.В. Москалев, И.В. Гриднева
Под редакцией профессора Шацкого В.П.

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОМ ОБУЧЕНИИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
для студентов гуманитарно-правового факультета,
проходящих подготовку по направлению 44.03.04
«Профессиональное обучение (по отраслям)»

Линейная алгебра
Аналитическая геометрия
Математический анализ функций
Дифференциальное и интегральное исчисление
Обыкновенные дифференциальные уравнения
Числовые и функциональные ряды
Случайные события и величины
Комплексные числа

ВОРОНЕЖ 2014

УДК 517.2 + 519.21

Высшая математика в профессиональном обучении: Учебное пособие / П.В. Москалев, И.В. Гриднева; Под ред. проф. Шацкого В.П. — Воронеж: ВГАУ, 2014. — 274 с.

Учебное пособие предназначено для студентов гуманитарно-правового факультета, проходящих подготовку по направлению 44.03.04 «Профессиональное обучение (по отраслям)». В учебном пособии излагается теоретический материал и приводятся примеры решения типовых задач по разделам: линейная и векторная алгебра, аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве, математический анализ, дифференциальное и интегральное исчисления функций одной независимой переменной, обыкновенные дифференциальные уравнения, числовые и функциональные ряды, комплексные числа, случайные события и случайные величины. В качестве приложений пособие содержит справочный материал по основным разделам элементарной и высшей математики, а также типовой практикум по всем освещаемым разделам. Такая структура позволяет использовать это пособие в качестве справочника и задачника на протяжении всего семестра, а также при подготовке к зачётам, экзаменам и промежуточному тестированию.

Рецензенты:

Заведующий кафедрой математического и прикладного анализа Воронежского государственного университета, д.ф.-м.н., профессор Шашкин А.И.

Профессор кафедры прикладной математики и математических методов в экономике Воронежского государственного аграрного университета, д.т.н. Буховец А.Г.

Оглавление

Рекомендуемая литература

1. **Краснов, М.Л.** Вся высшая математика: в 7 т. / М.Л. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко, Е.В. Шикин, В.И. Заляпин

   Т. 1: Аналитическая геометрия, векторная алгебра, линейная алгебра, дифференциальное исчисление. — М.: Эдиториал УРСС, 2013. — 336 с.;
   Т. 2: Интегральное исчисление, дифференциальное исчисление функций нескольких переменных, дифференциальная геометрия. — М.: Эдиториал УРСС, 2012. — 192 с.;
   Т. 3: Теория рядов, обыкновенные дифференциальные уравнения, теория устойчивости. — М.: Эдиториал УРСС, 2012. — 240 с.;
   Т. 5: Теория вероятностей, математическая статистика, теория игр. — М.: Эдиториал УРСС, 2012. — 296 с.

2. **Письменный, Д.Т.** Конспект лекций по высшей математике. — М.: Айрис-Пресс, 2013. — 608 с.

3. **Письменный, Д.Т.** Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. — М.: Айрис-Пресс, 2010. — 288 с.

4. **Кудрявцев, В.А.** Краткий курс высшей математики / В.А. Кудрявцев, Б.П. Демидович. — М.: АСТ, 2008. — 656 с.

5. **Лунгу, К.Н.** Сборник задач по высшей математике: 1–2 курс

   1 курс / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. — М.: Айрис-Пресс, 2013. — 576 с.
   2 курс / К.Н. Лунгу, В.П. Норин, Д.Т. Письменный, Ю.А. Шевченко, Е.Д. Куланин. — М.: Айрис-Пресс, 2013. — 592 с.

6. **Данко, П.Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2 ч. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. — М.: ОНИКС, 2009. Ч. 1. — 368 с.; Ч. 2. — 448 с.

Глава 1

Элементы линейной алгебры

1.1. Матрицы

Матрицей называют упорядоченную в виде прямоугольной таблицы совокупность чисел, которая при записи обрамляется в скобки. Матрица в целом обозначается прописными, а её *элементы* — строчными буквами латинского алфавита с добавлением *индексов*, указывающих на номер строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы подчеркнуть *размеры* матрицы используется запись $A_{m\times n} = (a_{ij})_m^n$. Если все элементы матрицы равны нулю, то её называют *нулевой матрицей* и обозначают буквой O. Если матрица содержит только одну строку $A_{1\times n}$ или только один столбец $A_{m\times 1}$, то её называют *матрицей-строкой* или *матрицей-столбцом*.

Матрицу, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называют *квадратной* и обозначают A_n, где n — *порядок* квадратной матрицы. Элементы матрицы a_{ii}, у которых номер строки равен номеру столбца: $i = j$, составляют *главную диагональ* квадратной матрицы $\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$. Если все элементы квадратной матрицы D_n, расположенные вне главной диагонали, равны нулю, то матрица называется *диагональной*. Диагональная матрица E_n называется *единичной*, если все элементы на её главной диагонали равны единице:

$$D_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если все элементы квадратной матрицы, расположенные ниже или выше её главной диагонали, равны нулю, то такую матрицу называют *верхней треугольной* U или *нижней треугольной* L. Если указанным свойством обладает прямоугольная матрица, то она называется *трапециевидной*:

$$U_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \quad U_{3\times 4} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}.$$

1.2. Операции над матрицами

Алгебраической суммой двух матриц A и B одинакового размера $m \times n$ называется матрица того же размера $C = A \pm B$ такая, что $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, где $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Произведением матрицы A на число λ называется матрица того же размера $B = \lambda A$ такая, что $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$, где $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Произведением двух матриц $A_{m\times k}$ и $B_{k\times n}$ называется матрица $C_{m\times n} = A_{m\times k} \cdot B_{k\times n}$ такая, что:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{t=1}^{k} a_{it}b_{tj}\,,$$

где $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Из приведённого определения видно, что произведение двух матриц существует тогда и только тогда, когда *число столбцов первой* матрицы равно *числу строк второй*. В общем случае $AB \neq BA$. Более того из существования произведения AB как правило *не следует* существование произведения BA.

Транспонированием называется операция замены каждой из строк матрицы на столбец с тем же номером. Обозначается операция транспонирования как A^{T}. Например, если дана матрица A размера 2×3, то после транспонирования она примет вид

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad (A^{\mathrm{T}})_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Свойства операции транспонирования

1. $(A^T)^T = A$;
2. $(\lambda)A^T = (\lambda A)^T$;
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

1.3. Определитель матрицы

Определителем или *детерминантом* квадратной матрицы n-го порядка называют число, представляющее собой алгебраическую сумму произведений полного числа сочетаний элементов, принадлежащих различным строкам и столбцам матрицы.

Приняты следующие обозначения определителя матрицы A_n:

$$\det A_n = |\,A_n|_n^n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определителем матрицы 1-го порядка A_1 называется число, равное её единственному элементу: $\det A_1 = a_{11}$.

Определителем матрицы 2-го порядка A_2 называется число, равное разности произведений элементов её главной и вспомогательной диагоналей: $\det A_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определители матриц более высоких порядков удобнее всего вычисляются с помощью разложения по элементам произвольной строки или столбца. Для вычисления определителей таких матриц рассмотрим новые понятия.

Минором элемента a_{ij} квадратной матрицы A_n n-го порядка называется определитель матрицы $(n-1)$ порядка, полученной из матрицы A_n после вычёркивания i-ой строки и j-го столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}. Например, миноры для элементов 2-ой строки матрицы 3-го порядка будут иметь вид

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A_n называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

т.е., если $(i+j)$ — чётное число, то $A_{ij} = M_{ij}$, если $(i+j)$ — нечётное число, то $A_{ij} = -M_{ij}$.

Согласно теореме Лапласа определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Разложение по элементам i-ой строки $(i = 1,2,\ldots,n)$ определителя матрицы A_n имеет вид

$$\det A_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}A_{il}.$$

Разложение по элементам j-го столбца $(j = 1,2,\ldots,n)$ определителя матрицы A_n имеет вид

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{l=1}^{n} a_{lj}A_{lj}.$$

Например, разложение определителя матрицы 3-го порядка по элементам 2-ой строки имеет вид

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \sum_{j=1}^{3} a_{2j}A_{2j}\,,$$

где A_{2j} — алгебраическое дополнение элемента a_{2j} матрицы A_3.

Свойства определителей

1. При транспонировании квадратной матрицы её определитель не изменяется:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}A_{ji} = \det A^{\mathrm{T}}\,.$$

   Из этого свойства следует, что все утверждения, сделанные для строк определителя, справедливы и для его столбцов.

2. Если матрица содержит нулевую строку или столбец, то её определитель равен нулю:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} 0 \cdot A_{ij} = 0\,.$$

3. Постоянный множитель для всех элементов какой-либо строки или столбца матрицы можно выносить за знак определителя:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (\lambda\, a_{ij})A_{ij} = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \lambda \det A\,.$$

4. Определитель, каждый элемент произвольной строки которого является суммой двух слагаемых, равен сумме двух определителей у одного из которых в указанной строке стоят первые слагаемые, а у другого — вторые, при условии, что остальные элементы у всех определителей совпадают, например:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+x_1 & a_{22}+x_2 & a_{23}+x_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

5. Если матрица B получена из матрицы A путём перестановки двух произвольных строк или столбцов, то её определитель изменит знак: $\det A = -\det B$.
6. Если матрица A имеет две одинаковые или пропорциональные строки или столбцы, то её определитель равен нулю: $\det A = 0$.
7. Определитель матрицы не изменится, если к произвольной её строке прибавить другую строку, умноженную на любое число.
8. Определитель произведения двух квадратных матриц одинакового порядка A и B равен произведению их определителей: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.
9. Определитель треугольной матрицы равен произведению её диагональных элементов.

1.4. Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется *обратной* по отношению к квадратной матрице A, если $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = E$, где E — единичная матрица того же порядка, что и A.

Если определитель квадратной матрицы не равен нулю, то такая матрица называется *невырожденной*. Для невырожденной квадратной матрицы A существует единственная обратная матрица A^{-1}, вычисляемая по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} — алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A.

Свойства обратной матрицы

1. $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
3. $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$;
4. $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

1.5. Системы линейных уравнений $n \times n$

Система n линейных уравнений, содержащая n неизвестных величин имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1\,; \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2\,; \\ \ldots & + & \ldots & + & \ldots & + & \ldots & = & \ldots\,; \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = & b_n\,, \end{cases}$$

где a_{ij}, b_i — действительные числа, называемые коэффициентами при неизвестных x_j и свободными членами уравнений соответственно. В более компактной форме эта система записывается:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\,, \qquad \text{где } i = 1,2,\ldots,n\,.$$

Система линейных уравнений называется *однородной*, если все её свободные члены равны нулю $b_i = 0$.

Решением системы линейных уравнений называется такая упорядоченная совокупность значений переменных x_j, которая при подстановке в каждое из уравнение системы обращает его в верное равенство. *Совместной* называют систему уравнений, если она имеет хотя бы одно решение. Если система уравнений имеет единственное решение, то она называется *определённой*.

Используя правила действий над матрицами, вышеуказанную систему уравнений можно представить в виде

$$AX = B,$$

где $A = (a_{ij})_n^n$ — матрица коэффициентов системы; $B = (b_i)_1^n$ — матрица-столбец свободных членов; $X = (x_j)_1^n$ — матрица-столбец искомых неизвестных величин.

Можно показать, что если матрица системы уравнений A — невырожденная, то искомое решение может быть получено с помощью *обратной матрицы* коэффициентов системы:

$$X = A^{-1}B.$$

Пример 1.1. Задана система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 4\,; \\ 2x + y + 3z = 5\,; \\ 3x + 4y + z = -2\,. \end{cases}$$

Требуется решить заданную систему уравнений с помощью обратной матрицы (матричным методом) и сделать проверку полученного решения.

► Обозначим матрицу коэффициентов системы, вектор правых частей и вектор неизвестных буквами A, B и X соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}; \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Тогда, учитывая свойства матриц, исходную систему уравнений можно записать в виде $AX = B$, а её решение как $X = A^{-1}B$, где A^{-1} — матрица, обратная к матрице коэффициентов системы A, составляется из алгебраических дополнений по формуле, приведённой в предыдущем разделе:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Вычислим алгебраические дополнения всех элементов матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -11; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5; \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -10;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -7; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5.$$

Для проверки правильности вычисления алгебраических дополнений вычислим определитель $\det A$ путём его разложения по каждой строке: $\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}$, где $i = 1, 2, 3$. Для $i = 1$ имеем формулу

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Т.е. $\det A = 1 \cdot (-11) + (-2) \cdot 7 + 1 \cdot 5 = -20$. Аналогично путём разложения по 2-й и 3-й строкам вычисляем:

$$\det A = 2 \cdot 6 + 1 \cdot (-2) + 3 \cdot (-10) = -20\,;$$
$$\det A = 3 \cdot (-7) + 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 = -20\,.$$

Так как все три определителя равны, то можно сделать вывод о правильности вычисления алгебраических дополнений.

Составим обратную матрицу и найдём искомое решение:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{-20}\begin{pmatrix} -11 & 6 & -7 \\ 7 & -2 & -1 \\ 5 & -10 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} =$$
$$= -\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ -40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Для проверки подставим найденное решение в исходные уравнения системы:

$$\begin{cases} 0 - 2 \cdot (-1) + 2 = 4\,; \\ 2 \cdot 0 + (-1) + 3 \cdot 2 = 5\,; \\ 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) + 2 = -2\,; \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} 4 = 4\,; \\ 5 = 5\,; \\ -2 = -2\,. \end{cases}$$

После подстановки получили верные тождества, следовательно, можно сделать вывод о правильности найденного решения. ◄

Использование свойств определителей позволяет прийти к следующему утверждению, известному под названием *теоремы Крамера.*

Пусть $\det A$ — определитель матрицы коэффициентов A системы линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а $\det A_j$ — определитель матрицы, получаемой из A при замене её столбца коэффициентов при переменной x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ на матрицу-столбец свободных членов B. Если $\det A \neq 0$, то исходная система уравнений имеет единственное решение, определяемое по *формулам Крамера*:

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}\,, \qquad \text{где } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Заметим, что если определитель $\det A = 0$ и все дополнительные определители $\det A_j = 0, j = 1,2,\ldots,n$, то система уравнений имеет бесконечное множество решений. Если же определитель $\det A = 0$ и хотя бы один из определителей $\det A_j \neq 0$, то система уравнений несовместна.

Пример 1.2. Решить систему уравнений из примера 1.1 *методом Крамера.*

► Т.к. согласно решению примера 1.1 определитель системы уравнений не равен нулю, то её решение можно найти по формулам Крамера:

$$x = \frac{\det A_x}{\det A}\,; \qquad y = \frac{\det A_y}{\det A}\,; \qquad z = \frac{\det A_z}{\det A}\,.$$

В нашем случае $\det A = -20 \neq 0$ и можно сделать вывод о том, что система имеет единственное решение. Для отыскания этого решения вычислим определители $\det A_x$, $\det A_y$ и $\det A_z$:

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot(-11) - (-2)\cdot 11 + 1\cdot 22 = 0\,;$$

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 11 - 4\cdot(-7) + 1\cdot(-19) = 20\,;$$

$$\det A_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-22) - (-2)\cdot(-19) + 4\cdot 5 = -40\,.$$

Воспользовавшись формулами Крамера, окончательно получим:

$$x = \frac{0}{-20} = 0\,; \qquad y = \frac{20}{-20} = -1\,; \qquad z = \frac{-40}{-20} = 2\,. \blacktriangleleft$$

1.6. Ранг матрицы

Рангом матрицы называется наивысший порядок отличных от нуля миноров. Минор с наивысшим порядком называется *базисным.* Ранг матрицы A обозначается $r(A)$ или $\operatorname{rank} A$.

Элементарными преобразованиями прямоугольной матрицы $A_{m\times n}$ называются такие операции над её элементами, которые не меняют ранга матрицы. К элементарным преобразованиям матрицы относятся следующие операции:

1) Умножение любой строки матрицы на произвольной число, отличное от нуля;
2) Перестановка двух любых строк матрицы;
3) Сложение одной из строк матрицы с любой другой строкой той же матрицы, умноженной на произвольный коэффициент (линейное комбинирование строк).

Матрицу B, полученную из A путём элементарных преобразований, называют *эквивалентной* матрице A и записывают это утверждение в виде $A \sim B$.

Заметим, что с помощью элементарных преобразований прямоугольную матрицу $A_{m\times n}$, где $m \leqslant n$, всегда можно привести к *трапециевидной форме*, содержащей ровно r ненулевых строк, причём число таких строк $r \leqslant m$ будет точно соответствовать рангу матрицы $r = \operatorname{rank} A_{m\times n}$.

1.7. Системы линейных уравнений $m \times n$

Система m линейных уравнений, содержащая n неизвестных величин имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1\,; \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2\,; \\ \ldots & + & \ldots & + & \ldots & + & \ldots & = & \ldots\,; \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m\,. \end{cases}$$

Используя правила действий над матрицами, вышеуказанную систему уравнений можно представить в виде

$$AX = B,$$

где $A = (a_{ij})_m^n$ — прямоугольная матрица коэффициентов системы размера $m \times n$; $B = (b_i)_1^m$ — матрица-столбец свободных членов размера $m \times 1$; $X = (x_j)_1^n$ — матрица-столбец неизвестных величин размера $n \times 1$.

Расширенной матрицей системы уравнений называется матрица C, полученная в результате добавления к матрице коэффициентов A матрицы свободных членов B:

$$C = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

С расширенной матрицей системы связана совместность системы линейных уравнений $m\times n$. В частности, в *теореме Кронекера-Капелли* доказывается, что для совместности системы линейных уравнений необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы коэффициентов системы был равен рангу её расширенной матрицы: $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} C = r$.

Заметим, что *базисными* неизвестными совместной системы линейных уравнений называют любые r неизвестных, коэффициенты при которых образуют отличный от нуля определитель — *базисный минор*. Тогда остальные $(r-n)$ неизвестных называют *свободными*.

Две системы линейных уравнений называются *равносильными*, если множества их решений совпадают.

Одним из наиболее эффективных методов решения $m \times n$ систем линейных уравнений является *метод Гаусса*, построенный на применении элементарных преобразований (см. раздел 1.6). Если в результате этих преобразований появляется уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_k$, где $b_k \neq 0$ при $k \leq m$, то исходная система несовместна, т.к. нарушается условие теоремы Кронекера-Капелли. В противном случае исходная система уравнений приводится к трапециевидной форме:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1r}x_r + \ldots + c_{1n}x_n = d_1\,; \\ \qquad\quad\; c_{22}x_2 + \ldots + c_{2r}x_r + \ldots + c_{2n}x_n = d_2\,; \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots = \ldots\,; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r + \ldots + c_{rn}x_r = d_r\,. \end{cases}$$

В частности, если $r = n$, то система приведена к треугольному виду и имеет единственное решение. Причём, из последнего уравнения можно найти значение x_n, из предпоследнего — x_{n-1} и т.д.

Если $r < n$, то переменные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ в системе будут *базисными*, а остальные $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ — *свободными*. Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1r}x_r = d_1 - c_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - c_{1n}x_n\,; \\ \qquad\quad\; c_{22}x_2 + \ldots + c_{2r}x_r = d_2 - c_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - c_{2n}x_n\,; \\ \qquad\qquad\qquad \ldots = \ldots \quad \ldots \quad \ldots\,; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_{rr}x_r = d_r - c_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - c_{rn}x_n\,. \end{cases}$$

Выразим в последнем уравнении x_r, поделив обе его части на c_{rr} и подставим в предыдущее уравнение. Выразим x_{r-1} из предпоследнего уравнения и подставим в третье снизу уравнение и т.д. Таким образом, определим значения переменных $x_r, x_{r-1}, \ldots, x_1$ через неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$. Т.е. получим *общее* решение, описывающие *множество допустимых решений* исходной системы $m \times n$:

$$\begin{cases} x_1 = \dot{d}_1 - \dot{c}_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - \dot{c}_{1n}x_n\,; \\ x_2 = \dot{d}_2 - \dot{c}_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - \dot{c}_{2n}x_n\,; \\ \ldots = \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\,; \\ x_r = \dot{d}_r - \dot{c}_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - \dot{c}_{rn}x_n\,. \end{cases}$$

Если свободные переменные принять равными нулю, то получим допустимое *базисное* решение.

Таким образом, метод Гаусса позволяет одновременно провести исследование системы линейных уравнений на совместность и, если она совместна, — решить её.

Пример 1.3. Решить систему уравнений из примера 1.1 *методом Гаусса.*

► Составим расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Прямой ход метода Гаусса. Приведём исходную систему уравнений к верхнему треугольному виду с помощью серии элементарных преобразований.

Вначале исключим переменную x из второго и третьего уравнений. Для этого первую строку расширенной матрицы умножим на -2 и почленно сложим со второй строкой, а затем первую строку расширенной матрицы умножим на -3 и почленно сложим с третьей строкой:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2-2 & 1+4 & 3-2 & 5-8 \\ 3-3 & 4+6 & 1-3 & -2-12 \end{array}\right).$$

Теперь исключим переменную y из третьего уравнения. Для этого умножим вторую строку матрицы на коэффициент -2 и почленно сложим полученную строку с третьей строкой расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & 10 & -2 & -14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & 10-10 & -2-2 & -14+6 \end{array}\right).$$

В результате получим эквивалентную исходной систему уравнений треугольного вида

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{array}\right).$$

Обратный ход метода Гаусса. Найдём решение исходной системы, используя структуру полученной матрицы.

Из последнего уравнения найдём значение неизвестной z:

$$-4z = -8 \qquad \Rightarrow \qquad z = \frac{-8}{-4} = 2\,.$$

Подставляя найденное значение z во второе уравнение, найдём значение неизвестной y:

$$5y + 2 = -3 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{-3-2}{5} = -1\,.$$

Наконец, подставляя найденные значения z и y в первое уравнение, найдём значение неизвестной x:

$$x - 2\cdot(-1) + 2 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad x = 4 - 2 - 2 = 0\,.$$

Так как найденное решение совпадает с предыдущими решениями, полученными в примерах 1.1 и 1.2 матричным методом и методом Крамера, то дополнительная проверка не требуется. ◄

Пример 1.4. Задана система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} x + 3y + 5z + 5t = 5\,; \\ 2x + 5y + 8z + 9t = 9\,; \\ x + 2y + 4z + 3t = 4\,. \end{cases}$$

Требуется, используя метод Гаусса, найти общее и соответствующее ему базисное решение заданной системы уравнений.

► **Совместность системы.** Выпишем расширенную матрицу системы C, найдём её ранг и одновременно ранг матрицы коэффициентов A заданной системы уравнений:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 9 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right).$$

Для этого с помощью серии элементарных преобразований приведём расширенную матрицу системы к трапециевидной форме.

Вначале исключим переменную x из всех уравнений, кроме первого. Для этого умножим первую строку матрицы C на коэффициент $-2/1 = -2$ и почленно сложим полученную строку со второй строкой расширенной матрицы. Затем умножим первую строку матрицы C на $-1/1 = -1$ и почленно сложим полученную строку с третьей строкой расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 9 & 9 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 2-2 & 5-6 & 8-10 & 9-10 & 9-10 \\ 1-1 & 2-3 & 4-5 & 3-5 & 4-5 \end{array}\right).$$

Заметим, что в полученной матрице вторая и третья строки содержат только отрицательные ненулевые элементы. Для большего удобства запишем эти строки в эквивалентную матрицу с обратными знаками. Затем исключим переменную y из третьего уравнения. Для этого умножим вторую строку матрицы C на коэффициент $-1/1 = -1$ и почленно сложим полученную строку с третьей строкой расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \sim \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1-1 & 1-2 & 2-1 & 1-1 \end{array}\right).$$

В результате получим эквивалентную запись расширенной матрицы C и матрицы коэффициентов системы A в трапециевидной форме:

$$C \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right), \qquad A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как видно, ранг матрицы коэффициентов системы равен 3 и добавлением столбца не может быть увеличен. Из этого следует, что исходная система уравнений совместна.

Решение системы. Найдём общее решение полученной системы, воспользовавшись её трапециевидной структурой

$$\begin{cases} x + 3y + 5z + 5t = 5\,; \\ \qquad y + 2z + t = 1\,; \\ \qquad\quad -z + t = 0\,. \end{cases}$$

Так как число неизвестных системы $n = 4$ больше числа уравнений $m = 3$, то переменные необходимо разделить на свободные и базисные. Число базисных переменных будет равно рангу матрицы коэффициентов системы $r = \operatorname{rank} A$. Выберем в качестве базисных три произвольные переменные такие, что определитель, составленный из их коэффициентов, будет отличен от нуля. Пусть это будут переменные x, y, z:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1 \neq 0.$$

Тогда переменная t остаётся свободной. Выразим через t базисные переменные x, y, z, перенося t в правую часть равенства, начиная с последнего.

Из третьего уравнения найдём выражение для z:

$$-z + t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad z = t\,.$$

Из второго уравнения найдём выражение для y:

$$y + 2t + t = 1 \qquad \Rightarrow \qquad y = 1 - 3t\,.$$

Наконец, из первого уравнения найдём выражение для x:

$$x + 3(1 - 3t) + 5t + 5t = 5 \qquad \Rightarrow \qquad x = 2 - t\,.$$

Общее решение заданной системы уравнений найдено:

$$(x;\ y;\ z;\ t) = (2 - t;\ 1 - 3t;\ t;\ t)\,.$$

Соответствующее ему базисное решение найдём приравняв к нулю свободную переменную, т.е. при $t = 0$:

$$(x;\ y;\ z;\ t) = (2;\ 1;\ 0;\ 0)\,. \qquad \blacktriangleleft$$

1.8. Собственные значения и собственные векторы матрицы

Число λ называется *собственным значением* квадратной матрицы A порядка n, если существует такой ненулевой n-мерный вектор x, что выполняется равенство $A\,x = \lambda\,x$. При этом вектор x называется *собственным вектором* матрицы A, принадлежащим её собственному значению λ.

Множество всех собственных значений матрицы A совпадает с множеством всех решений уравнения $|A - \lambda\,E| = 0$, которое называется *характеристическим уравнением* матрицы A. Множество всех собственных векторов матрицы A, принадлежащих её собственному значению λ, совпадает с множеством всех ненулевых решений системы однородных уравнений $(A - \lambda\,E)\,x = 0$.

Можно доказать, что *если квадратная матрица A_n имеет n различных собственных значений, то отвечающие им собственные векторы линейно независимы, а матрица A_n в базисе её собственных векторов является диагональной:*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Пример 1.5. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы $A = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{smallmatrix}\right)$ и привести её к диагональному виду.

► Составим характеристическое уравнение матрицы A:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 8 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 14\lambda + 13 = 0,$$

решение которого даёт собственные значения для A: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 13$.

Для определения координат собственных векторов получим две системы линейных уравнений. Решая их, определим множество допустимых решений.

$$(A - \lambda_1 E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (5-\lambda_1)x_1 + 4x_2 = 0\,; \\ 8x_1 + (9-\lambda_1)x_2 = 0\,. \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0\,; \\ 8x_1 + 8x_2 = 0\,. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{Общее решение: } x_2 = -x_1.$$

$$(A - \lambda_2 E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (5-\lambda_2)\,x_1 + 4\,x_2 = 0\,; \\ 8\,x_1 + (9-\lambda_2)\,x_2 = 0\,. \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} -8\,x_1 + 4\,x_2 = 0\,; \\ 8\,x_1 - 4\,x_2 = 0\,. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{Общее решение: } x_2 = 2\,x_1.$$

Полагая в общем решении первой системы $x_1 = C_1$, получим $x_2 = -C_1$, где C_1 — произвольная постоянная. Следовательно, собственному значению $\lambda_1 = 1$ соответствует семейство собственных векторов $U = (C_1, -C_1)$.

Полагая в общем решении второй системы $x_1 = C_2$, получим $x_2 = 2C_2$. Следовательно, собственному значению $\lambda_2 = 13$ соответствует семейство собственных векторов $V = (C_2, 2C_2)$.

Тогда в базисе из любых пар собственных векторов $U = (C_1, -C_1)$ и $V = (C_2, 2C_2)$ матрица A будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleleft$$

1.9. Контрольные вопросы

1. Что называется матрицей, элементом матрицы, строкой и главной диагональю матрицы?
2. Какие матрицы называют нулевой, квадратной, диагональной, единичной и треугольной?
3. Какие матрицы можно складывать и как?
4. После умножения матрицы на число получится число или матрица?
5. Как вычисляется произведение двух матриц? Обладает ли произведение двух матриц коммутативностью ($AB \equiv BA$)?

6. Какая матрица называется транспонированной к данной? Какие размеры будет иметь матрица A^{T}, если дана матрица $A_{3\times 4}$?
7. Что называется определителем матрицы? Что называется порядком определителя? Как вычисляются определители первого и второго порядков?
8. Что называется дополнительным минором и алгебраическим дополнением к элементу матрицы a_{ij}?
9. Запишите разложение определителя матрицы 3-го порядка: а) по 3-ей строке; б) по 1-му столбцу.
10. Чему равен определитель матрицы с двумя одинаковыми строками? Какая матрица называется вырожденной?
11. Какая матрица называется обратной к данной матрице? Запишите матрицу, обратную к единичной матрице.
12. Запишите систему n линейных уравнений с n неизвестными в общем виде.
13. Что называется решением системы линейных уравнений? Какие системы называются совместными и несовместными; определёнными и неопределёнными?
14. При каком условии система линейных уравнений имеет единственное решение? Сколько решений имеет система уравнений, если определитель системы равен -3?
15. Запишите систему уравнений и решение системы в матричном виде. В каком случае система линейных уравнений может быть решена матричным способом?
16. Запишите и поясните применение формул Крамера. Что можно сказать о системе, если её определитель равен нулю?
17. Что называется рангом матрицы? Может ли ранг матрицы быть больше числа: а) ёе строк; б) ёе столбцов?
18. Запишите систему m линейных уравнений с n неизвестными в общем виде. Приведите пример системы размерности 2×3.
19. Какие преобразования матрицы называются элементарными? Какие системы уравнений называются равносильными?
20. Сколько решений имеет система линейных уравнений $m\times n$, если ранг матрицы системы равен числу неизвестных $r = n$?
21. В каком случае система линейных уравнений $m \times n$ имеет бесконечное множество решений? Несовместна?
22. Какие числа называются собственными значениями матрицы?
23. Какие векторы называются собственными векторами матрицы?

Глава 2

Элементы аналитической геометрии

2.1. Декартовы координаты

Осью координат будем называть прямую линию с указанным на ней направлением, началом отсчёта и масштабной единицей. Координатная ось позволяет установить взаимно однозначное соответствие между множеством точек прямой и множеством действительных чисел. При этом *начало отсчёта* соответствует числу 0, *масштабная единица* — расстоянию между точками 0 и 1, а *направление* указывает порядок расстановки точек по мере возрастания соответствующих им чисел.

Координатой точки M на оси будем называть число x, равное отношению длины отрезка, соединяющего данную точку с началом координат O, к длине единичного отрезка. Если точка расположена относительно начала координат в заданном направлении, то её координата считается положительной, иначе — отрицательной. *Расстояние между двумя точками $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ на оси координат*, соответствующее длине отрезка M_1M_2, определяется как разность координат этих точек

$$d_{M_1M_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|.$$

Пара взаимно перпендикулярных осей с общим началом координат в точке O и выбранными масштабными единицами образуют *декартову прямоугольную систему координат на плоскости*. Одну из осей называют *осью абсцисс Ox*, а другую — *осью ординат Oy*. *Координатами точки на плоскости $M(x,y)$* называется упорядоченная пара чисел x, y, соответствующих координатам её проекций на оси Ox и Oy (см. рис. 2.1).

Расстояние между двумя точками $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ *на плоскости* определяется как

$$d_{M_1M_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

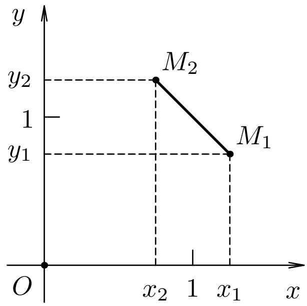


Рис. 2.1. Расстояние между точками на плоскости

Тройка взаимно перпендикулярных осей с общим началом координат в точке O и выбранными масштабными единицами образуют *декартову прямоугольную систему координат в пространстве.* Аналогично плоскому случаю первую из осей называют *осью абсцисс* Ox, вторую ось — *осью ординат* Oy, а третью — *осью аппликат* Oz. *Координатами точки в пространстве* $M(x,y,z)$ называется упорядоченная тройка чисел x, y, z, соответствующих координатам её проекций на оси Ox, Oy, Oz. *Расстояние* между двумя точками $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$ *в пространстве* определяется как

$$d_{M_1M_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

2.2. Операции над векторами

Вектором называют направленный отрезок, соединяющий две точки и обозначают его как $\overline{AB}$ или $\overline{a}$. Точку A называют *началом*, а точку B — *концом* вектора $\overline{AB}$. *Длина* вектора соответствует расстоянию между его начальной и конечной точками и обозначается как $|\overline{AB}|$. Векторы $\overline{o}$ и $\overline{e}$ называются *нулевым* и *единичным*, если их длины в выбранной системе координат будут равны нулю $|\overline{o}| = 0$ и единице $|\overline{e}| = 1$, соответственно.

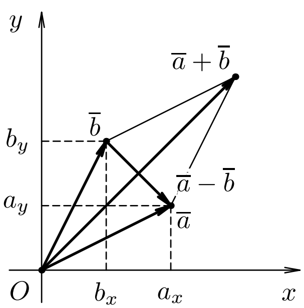


Рис. 2.2. Сумма и разность векторов на плоскости

Векторы называются *коллинеарными* $\overline{a} \parallel \overline{b}$, если они лежат на параллельных прямых. Векторы называются *равными* $\overline{a} = \overline{b}$, если они имеют одинаковую длину и направление. *Компланарными* называются векторы, лежащие в одной плоскости либо в параллельных плоскостях.

Два вектора расположены *последовательно*, если конец одного из них является началом другого. *Суммой двух последовательно расположенных векторов* $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c} = \overline{a}+\overline{b}$, соединяющий начало первого вектора $\overline{a}$ с концом второго $\overline{b}$ (см. рис. 2.2). Для каждого вектора $\overline{a}$ существует *противоположный* вектор $-\overline{a}$ такой, что $\overline{a}-\overline{a}=\overline{o}$. Тогда *разностью двух векторов* $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$ такой, что $\overline{c}+\overline{b}=\overline{a}$.

Произведением вектора $\overline{a}$ *на число* λ называется вектор $\overline{b}=\lambda\overline{a}$, имеющий длину $|\overline{b}|=|\lambda|\,|\overline{a}|$, сонаправленный вектору $\overline{a}$ при $\lambda>0$ и противоположно направленный при $\lambda<0$. Заметим, что если вектор $\overline{b}$ коллинеарен ненулевому вектору $\overline{a}$, то существует действительное число λ такое, что $\overline{b}=\lambda\overline{a}$.

2.3. Координаты векторов

Линейной комбинацией векторов $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, ..., $\overline{e}_n$ называют сумму их произведений на произвольные действительные числа λ_1, λ_2, ..., λ_n:

$$\lambda_1\overline{e}_1+\lambda_2\overline{e}_2+\ldots+\lambda_n\overline{e}_n\,.$$

Векторы $\overline{e}_i$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие действительные числа λ_i, не равные одновременно нулю, при которых линейная комбинация указанных векторов обращается в нуль:

$$\lambda_1\overline{e}_1+\lambda_2\overline{e}_2+\ldots+\lambda_n\overline{e}_n=\overline{o}\,.$$

Если линейная комбинация векторов обращается в нуль лишь при $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$, то векторы $\overline{e}_i$ называются *линейно независимыми.*

Заметим, что если хотя бы один из векторов $\overline{e}_i$ равен нулевому вектору $\overline{o}$, то система векторов будет линейно зависимой.

Можно доказать, что каждый вектор на некоторой прямой можно представить единственным способом в виде

$$\overline{b}=\lambda\overline{e}\,,$$

где вектор $\overline{e}$ называется *базисом* данной прямой, а число λ — *координатой вектора* $\overline{b}$ в базисе $\overline{e}$.

Аналогично предыдущему можно доказать, что каждый вектор на некоторой плоскости можно представить единственным способом:

$$\overline{c}=\lambda_1\overline{e}_1+\lambda_2\overline{e}_2\,,$$

где упорядоченная пара неколлинеарных (т.е. линейно независимых) векторов $(\overline{e}_1,\overline{e}_2)$ называется *базисом* данной плоскости, а числа λ_1, λ_2 — *координатами вектора* $\overline{c}$ в базисе $(\overline{e}_1,\ \overline{e}_2)$.

Тогда каждый вектор трёхмерного пространства также можно представить единственным способом:

$$\overline{d} = \lambda_1 \overline{e}_1 + \lambda_2 \overline{e}_2 + \lambda_3 \overline{e}_3 \,,$$

где упорядоченная тройка некомпланарных (т.е. линейно независимых) векторов $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ называется *базисом* данного пространства, а числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — *координатами вектора* $\overline{d}$ в базисе $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$.

Заметим, что запись произвольного вектора $\overline{d}$ в виде линейной комбинации векторов базиса $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ называется *разложением вектора по базису*.

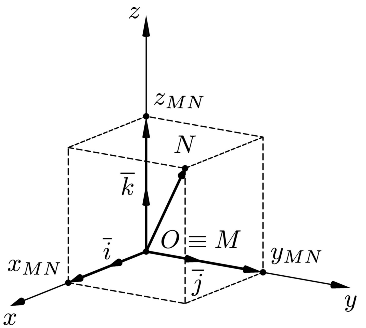


Рис. 2.3. Разложение вектора по стандартному базису

Часто используют так называемый *стандартный базис* из взаимно перпендикулярных единичных векторов, обозначаемый как $(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$ (см. рис. 2.3). В декартовой прямоугольной системе координат векторы $(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$ сонаправлены с соответствующими осями координат Ox, Oy, Oz и называются *ортами*. Тогда любой вектор $\overline{a}$ единственным образом можно представить в виде линейной комбинации орт:

$$\overline{a} = a_x \overline{i} + a_y \overline{j} + a_z \overline{k} \,,$$

где числа a_x, a_y, a_z соответствуют координатам вектора $\overline{a}$ в базисе $(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$. С другой стороны, координаты a_x, a_y, a_z вектора $\overline{a}$ — это его проекции на соответствующие координатные оси. Вектор $\overline{a}$ с координатами a_x, a_y, a_z записывают в виде $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Длина вектора $\overline{a}$ определяется по формуле

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \,.$$

Сложение, вычитание векторов и умножение вектора на число выполняется покоординатно:

$$\overline{a} \pm \overline{b} = (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z)\,;$$
$$\lambda \overline{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)\,.$$

При известных координатах точек $M(x_1, y_1, z_1)$ и $N(x_2, y_2, z_2)$ координаты вектора $\overline{a} = \overline{MN}$ вычисляются по формуле

$$\overline{a} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)\,.$$

Вектор $\overline{r} = \overline{OM}$, исходящий из начала координат, с концом в произвольной точке $M(x_1, y_1, z_1)$ называется *радиус-вектором* точки M. При этом координаты радиус-вектора $\overline{OM}$ совпадают с координатами точки M

$$\overline{r} = (x_1, y_1, z_1)\,.$$

2.4. Произведения векторов

Скалярным произведением двух векторов $\overline{a}\cdot\overline{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}|\,|\overline{b}|\cos\varphi\,.$$

Тогда *угол между векторами* $\overline{a}$ и $\overline{b}$ можно определить как

$$\cos\varphi = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}.$$

Следовательно два ненулевых вектора *ортогональны* $\overline{a}\perp\overline{b}$ тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю: $\overline{a}\cdot\overline{b} = 0$. В случае, если их скалярное произведение положительно $\overline{a}\cdot\overline{b} > 0$, то векторы образуют острый угол $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, а если оно отрицательно $\overline{a}\cdot\overline{b} < 0$, — тупой $\varphi\in\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Заметим, что при $\overline{a} = \overline{b}$ угол между векторами $\varphi = 0$ и получаем скалярный квадрат:

$$\overline{a}\cdot\overline{a} = \overline{a}^{\,2} = |\overline{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2\,.$$

Если векторы $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$ заданы своими декартовыми координатами, то их скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих координат:

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\,.$$

Тогда условие *ортогональности* векторов $\overline{a}\perp\overline{b}$ в координатной форме имеет вид

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0\,.$$

Условие коллинеарности векторов $\overline{a}\parallel\overline{b}$ в координатной форме записывается в виде

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}\,.$$

Векторным произведением двух векторов $\overline{a}\times\overline{b}$ называется вектор, ортогональный к своим сомножителям, ориентированный по правилу правого винта и равный произведению длин этих сомножителей на синус угла между ними

$$|\overline{a}\times\overline{b}| = |\overline{a}|\,|\overline{b}|\sin\varphi\,.$$

Геометрически последняя формула соответствует площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (см. на рис. 2.4).

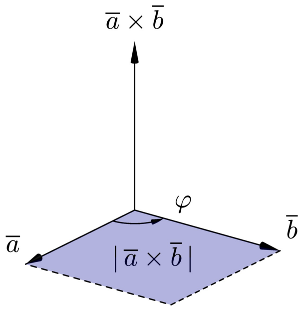


Рис. 2.4. Векторное произведение двух векторов

Из определения векторного произведения вытекает, что два вектора *коллинеарны* $\overline{a} \parallel \overline{b}$ тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору

$$\overline{a} \times \overline{b} = \overline{o}\,.$$

Если два вектора $\overline{a}(a_x,\, a_y,\, a_z)$ и $\overline{b}(b_x,\, b_y,\, b_z)$ заданы своими декартовыми координатами, то их векторное произведение может быть записано в виде определителя третьего порядка

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Смешанным (векторно-скалярным) произведением трёх векторов $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ называется число, определяемое соотношением

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = (\,\overline{a} \times \overline{b}\,) \cdot \overline{c}\,.$$

Геометрически смешанное произведение трёх векторов $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ соответствует объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах и взятому со знаком «плюс», если векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют правую тройку, или со знаком «минус», если тройка векторов левая (см. на рис. 2.5).

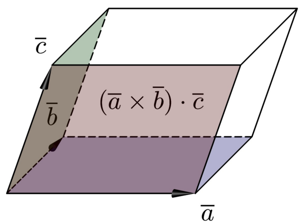


Рис. 2.5. Смешанное произведение трёх векторов

Если векторы лежат в одной плоскости, то объём соответствующего параллелепипеда будет равен нулю, откуда вытекает необходимое и достаточное условие *компланарности* трёх векторов

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = 0\,.$$

Если векторы $\overline{a}(a_x,\, a_y,\, a_z)$, $\overline{b}(b_x,\, b_y,\, b_z)$ и $\overline{c}(c_x,\, c_y,\, c_z)$ заданы своими декартовыми координатами, то их смешанное произведение может быть записано в виде определителя третьего порядка

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

2.5. Уравнение прямой на плоскости

Уравнение прямой, проходящей через точку плоскости $M(x_0, y_0)$ и имеющей *нормальный*[1] *вектор* $\overline{n} = (A, B)$, записывается в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0\,.$$

Используя обозначение $C = -Ax_0 - By_0$, получим *общее уравнение прямой* на плоскости:

$$Ax + By + C = 0\,.$$

Две прямые, заданные своими общими уравнениями

$$\begin{gathered} A_1x + B_1y + C_1 = 0\,, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{gathered}$$

параллельны тогда и только тогда, когда соответствующие коэффициенты при переменных x и y пропорциональны, т.е.:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}\,.$$

Две прямые, заданные своими общими уравнениями, *перпендикулярны* тогда и только тогда, когда верно равенство

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0\,.$$

Уравнение прямой, проходящей *через две точки* плоскости $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, записывается в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\,.$$

Тангенс угла наклона этой прямой к оси Ox называется *угловым коэффициентом* прямой:

$$\operatorname{tg}\varphi = k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,,$$

а её *направляющий вектор*[2] $\overline{s} = \{s_x, s_y\}$ имеет координаты, равные соответственно $s_x = x_2 - x_1$ и $s_y = y_2 - y_1$.

---

[1] На плоскости *нормальным* называется ненулевой вектор $\overline{n}$, перпендикулярный к данной прямой.

[2] *Направляющим* называется вектор $\overline{s}$, параллельный данной прямой.

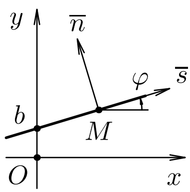


Рис. 2.6. Прямая линия на плоскости

Уравнение прямой с известным угловым коэффициентом k имеет вид

$$y = kx + b\,,$$

где b — величина отрезка, отсекаемого данной прямой на оси Oy от начала координат, $k = \operatorname{tg}\varphi$ (см. рис. 2.6).

Объединив полученные результаты, запишем уравнение прямой с известным угловым коэффициентом k, проходящей через точку плоскости $M(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = k(x - x_0)\,.$$

Под *углом между прямыми* на плоскости понимают наименьший из двух смежных углов, образованных этими прямыми. Если две прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами: $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$, то угол φ между ними определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}\,,$$

а *условия параллельности и перпендикулярности* этих прямых имеют вид:

$$k_1 - k_2 = 0\,, \qquad k_2 \cdot k_1 = -1.$$

Расстоянием d от точки $M_0(x_0;\, y_0)$ до прямой $A\,x + B\,y + C = 0$ называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую

$$d = \frac{|A\,x_0 + B\,y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,.$$

Пример 2.1. Даны координаты вершин треугольника ABC:

$$A(-1; 2)\,, \quad B(5; -1)\,, \quad C(-4; -5)\,.$$

Требуется: 1) найти длину стороны AB; 2) составить уравнения сторон AB и BC и вычислить их угловые коэффициенты; 3) вычислить внутренний угол при вершине B в радианах; 4) составить уравнение медианы AE; 5) составить уравнение и вычислить длину высоты CD; 6) составить уравнение прямой, проходящей через точку E параллельно стороне AB и определить координаты точки M её пересечения с высотой CD; 7) составить уравнение окружности с центром в точке E, проходящей через вершину C.

Указание. Заданный треугольник, все полученные линии и характерные точки необходимо построить в системе координат xOy.

► **1.** Найдём длину стороны AB. Расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ определяется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,,$$

воспользовавшись которой находим длину стороны AB:

$$d_{AB} = \sqrt{(5+1)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}\,.$$

2. Составим уравнения сторон AB и BC и вычислим их угловые коэффициенты. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки плоскости $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, имеет вид

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\,.$$

Подставляя в формулу координаты точек A и B, получаем общее уравнение стороны AB:

$$\frac{y-2}{-1-2} = \frac{x+1}{5+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{y-2}{-1} = \frac{x+1}{2} \quad \Rightarrow \quad x + 2y - 3 = 0\,.$$

Угловой коэффициент k_{AB} для прямой AB найдём, преобразовав полученное уравнение к виду уравнения прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$. В нашем случае:

$$2y = -x + 3 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2}\,x + \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad k_{AB} = -\frac{1}{2}\,.$$

Аналогично получим общее уравнение прямой BC и найдём её угловой коэффициент k_{BC}:

$$\frac{y+1}{-5+1} = \frac{x-5}{-4-5} \quad \Rightarrow \quad \frac{y+1}{-4} = \frac{x-5}{-9} \quad \Rightarrow \quad -4x + 9y + 29 = 0\,.$$

Далее:

$$-9y = -4x + 29 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{4}{9}\,x - \frac{29}{9} \quad \Rightarrow \quad k_{BC} = \frac{4}{9}\,.$$

3. При нахождении внутреннего угла B для заданного треугольника ABC воспользуемся формулой[3)]

[3)] Порядок вычисления разности угловых коэффициентов, стоящих в числителе этой дроби, зависит от взаимного расположения прямых AB и BC. Подумайте, как бы вы стали искать внутренние углы A и C треугольника ABC?

$$\operatorname{tg} B = \frac{k_{BC} - k_{AB}}{1 + k_{BC} \cdot k_{AB}}\,.$$

Подставив ранее вычисленные значения k_{AB} и k_{BC}, находим:

$$\operatorname{tg} B = \frac{\frac{4}{9} + \frac{1}{2}}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{4}{9}} = \frac{17}{14} \approx 1{,}2143\,.$$

Теперь, воспользовавшись таблицами значений тригонометрических функций или инженерным микрокалькулятором, получаем значение угла в радианах $\angle B \approx 0{,}88$ рад[4)].

4. Для составления уравнения медианы AE вычислим сначала координаты точки E, которая лежит на середине отрезка BC:

$$x_E = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{5 + (-4)}{2} = \frac{1}{2}\,;$$
$$y_E = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{(-1) + (-5)}{2} = -3\,.$$

Подставив координаты точек A и E в уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, получаем общее уравнение медианы AE:

$$\frac{y-2}{-3-2} = \frac{x+1}{\frac{1}{2}+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{y-2}{-5} = \frac{2(x+1)}{3} \quad \Rightarrow \quad 10x + 3y + 4 = 0\,.$$

5. Для составления уравнения высоты CD воспользуемся условием перпендикулярности прямых AB и CD:

$$k_{AB} \cdot k_{CD} = -1\,,$$

откуда следует, что $k_{CD} = -1/k_{AB} = 2$. Подставив в уравнение

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

значение $k_{CD} = 2$ и соответствующие координаты точки C, найдём общее уравнение высоты CD:

$$y + 5 = 2(x + 4) \qquad \Rightarrow \qquad 2x - y + 3 = 0\,.$$

Длину высоты CD определим как расстояние d от заданной точки $C(-4; 5)$ до прямой AB: $x + 2y - 3 = 0$ по формуле

[4)] Напомним, что при необходимости перевода значения угла из градусов ($^\circ$), угловых минут ($'$) и секунд ($''$) в радианы следует использовать соотношения: $180^\circ \approx 3{,}14$ рад; $60' = 1^\circ$; $60'' = 1'$.

$$d_{CD} = \frac{|\,1\cdot(-4)+2\cdot(-5)-3\,|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{17}{\sqrt{5}}\,.$$

6. Составим уравнение прямой, проходящей через точку E параллельно стороне AB. Воспользуемся условием параллельности прямой AB и искомой прямой EF:

$$k_{EF} = k_{AB} = -\frac{1}{2}\,.$$

Подставив в уравнение $y-y_0=k(x-x_0)$ координаты точки E и значение k_{EF}, получим искомое уравнение прямой EF:

$$y+3=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right) \qquad \Rightarrow \qquad 2x+4y+11=0\,.$$

Координаты точки M, как точки пересечения прямых EF и CD, найдём, объединив уравнения этих прямых в систему и решив её:

$$\begin{cases} 2x+4y+11=0\,; \\ \ \ 2x-y+3=0\,; \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x=-\dfrac{23}{10}\,; \\ y=-\dfrac{8}{5}\,. \end{cases}$$

Отсюда координаты точки $M(-2{,}3;-1{,}6)$ (см. рис. 2.7).

7. Запишем нормальное уравнение окружности с центром в точке $(x_0;y_0)$ и радиусом, равным R

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

По условию радиус искомой окружности равен расстоянию от её центра (точки E) до точки C. В таком случае можно записать, что $R=d_{EC}$, а следовательно и $R^2=d_{EC}^2$:

$$d_{EC}^2=(x_E-x_C)^2+(y_E-y_C)^2=$$
$$=\left(\frac{1}{2}-(-4)\right)^2+\Big((-3)-(-5)\Big)^2=\frac{97}{4}\,.$$

Заменив в уравнении окружности координаты центра (x_0,y_0) на координаты точки $E(x_E,y_E)$, а R^2 на d_{EC}^2 получим искомое уравнение окружности:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\Big(y+3\Big)^2=\frac{97}{4}\,.$$

На рис. 2.7 показано построение заданного треугольника ABC, а также всех полученных линий и характерных точек в системе координат xOy. ◀

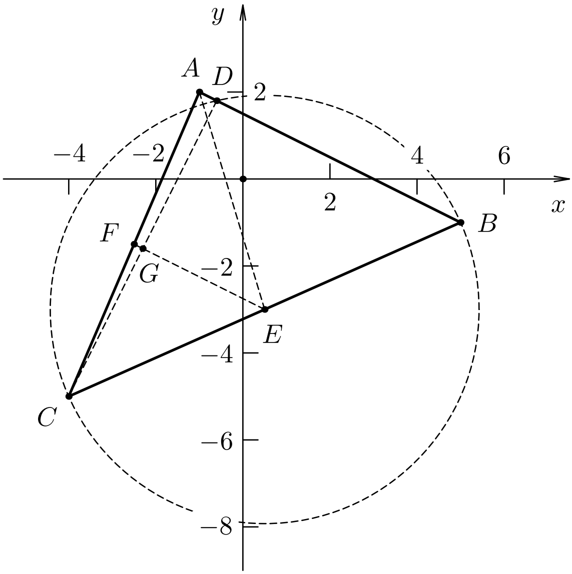


Рис. 2.7. Аналитическая геометрия на плоскости. Пример 2.1

2.6. Уравнения линий второго порядка на плоскости

Уравнение вида

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

если $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ определяет на плоскости *линию второго порядка.* В зависимости от соотношения коэффициентов линии второго порядка разделяют на *эллиптические*, *гиперболические* и *параболические.*

Окружность

Окружностью называется множество точек плоскости $M(x, y)$, равноудалённых от данной точки (центра). *Нормальное уравнение окружности* имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2\,,$$

где x_0, y_0 — координаты центра окружности, R — радиус окружности. В частности, уравнение окружности с центром в начале координат $x_0 = y_0 = 0$ имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$.

Эллипс

Эллипсом называется множество точек плоскости $M(x, y)$, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек, называемых фокусами F_1 и F_2, есть величина постоянная:

$$F_1M + F_2M = 2a = \mathrm{const}\,.$$

Если фокусы эллипса $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат $O(0, 0)$ (см. рис. 2.8), то уравнение эллипса имеет *канонический вид*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \qquad \text{где} \qquad a^2 = b^2 + c^2\,.$$

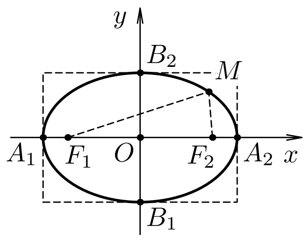


Рис. 2.8. Эллипс

Точки с координатами $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ называют *вершинами эллипса*. Отрезок $A_1A_2 = 2a$ образует *большую ось*, а отрезок $B_1B_2 = 2b$ — *малую ось эллипса*. Тогда величины a и b будут равны соответственно *большой* и *малой полуосям эллипса*. Форма эллипса определяется отношением половины фокусного расстояния к большой полуоси — *эксцентриситетом эллипса* $\varepsilon = \frac{c}{a}$, причём $0 < \varepsilon < 1$, так как $0 < c < a$.

Если эксцентриситет эллипса принять равным нулю $\varepsilon = 0$, то полуоси эллипса a и b будут равны друг другу и эллипс выродится в окружность

$$x^2 + y^2 = a^2\,.$$

Гипербола

Гиперболой называется множество точек плоскости $M(x, y)$, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек, называемых фокусами F_1 и F_2, есть величина постоянная:

$$|F_1M - F_2M| = 2a = \mathrm{const}\,.$$

Если фокусы гиперболы $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат $O(0,0)$ (см. рис. 2.9), то уравнение гиперболы имеет *канонический вид*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \ \text{где} \quad a^2 + b^2 = c^2\,.$$

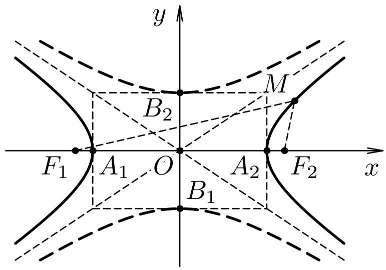


Рис. 2.9. Гипербола

Четыре точки с координатами $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ называют *вершинами гиперболы*. Отрезок $A_1A_2 = 2a$ образует *действительную ось*, а отрезок $B_1B_2 = 2b$ — *мнимую ось гиперболы*. Тогда величины a и b будут равны соответственно *действительной* и *мнимой полуосям гиперболы*. Форма гиперболы определяется отношением половины фокусного расстояния к действительной полуоси — *эксцентриситетом гиперболы*: $\varepsilon = c/a$; причём $\varepsilon > 1$, так как $c > a$. При $\varepsilon = 1$ ветви гиперболы вырождаются в прямые, проходящие через точки $(-a;-b)$, $(a;b)$ и $(-a;b)$, $(a;-b)$, которые являются *асимптотами*[5] *гиперболы*:

$$y = \frac{b}{a}x \qquad \text{и} \qquad y = -\frac{b}{a}x\,.$$

Парабола

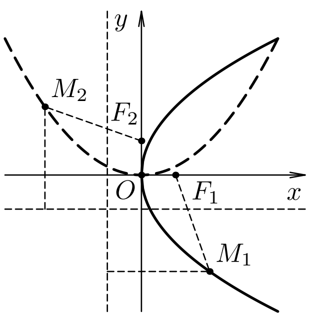


Рис. 2.10. Парабола

Параболой называется множество точек плоскости $M(x,y)$, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки F, называемой *фокусом параболы*, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой *директрисой параболы*. Расстояние от фокуса F до директрисы параболы равно p и называется *параметром параболы*.

Если фокус параболы $F(\frac{p}{2};0)$ расположен на оси Ox, а директриса параболы перпендикулярна к этой оси $x = -\frac{p}{2}$, то парабола будет симметрична относительна оси Ox (см. сплошную линию на рис. 2.10) и её уравнение имеет *канонический вид*

$$y^2 = 2px\,.$$

Если фокус параболы $F(0;\frac{p}{2})$ расположен на оси Oy, а директриса параболы перпендикулярна к этой оси $y = -\frac{p}{2}$, то парабола будет

[5] Прямая называется асимптотой неограниченной кривой, если расстояние от точки $M(x,y)$ до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки M вдоль кривой от начала координат.

симметрична относительна оси Oy (см. штриховую линию на рис. 2.10) и её уравнение также имеет *канонический вид*

$$x^2 = 2py\,.$$

В рассмотренных случаях, вершина параболы, расположенная в середине перпендикуляра, опущенного из её фокуса на директрису, совпадает с началом координат $O(0{,}0)$.

Если параметр параболы положителен $p > 0$, то направление ветвей параболы совпадает с положительным направлением оси симметрии, а если он отрицателен $p < 0$, то направление ветвей параболы совпадает с отрицательным направлением оси симметрии.

Пример 2.2. Дано уравнение окружности

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0.$$

Требуется найти координаты центра и радиус окружности.

► Выделяя полные квадраты для членов, содержащих x, и членов, содержащих y, приведём это уравнение к виду

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 11 + 1 + 4,$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16.$$

Таким образом, центр данной окружности находится в точке $C(1, -2)$, а радиус окружности $R = 4$. ◄

Пример 2.3. Дано уравнение гиперболы

$$x^2 - 4y^2 - 36 = 0\,.$$

Требуется найти параметры a, b, c, ε гиперболы.

► Приведём данное уравнение к каноническому виду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \qquad \text{где} \qquad a^2 + b^2 = c^2\,.$$

Для этого разделим заданное уравнение на 36:

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1\,.$$

Отсюда следует, что действительная полуось гиперболы $a = 6$, а мнимая полуось $b = 3$. По формуле $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, то есть координаты фокусов гиперболы $F_1(-3\sqrt{5}, 0)$, $F_2(3\sqrt{5}, 0)$, а её эксцентриситет равен $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. ◄

2.7. Уравнения прямой и плоскости в пространстве

Уравнение плоскости, которая проходит через точку пространства $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и имеет *нормальный*[6] *вектор* $\bar{n} = (A, B, C)$, записывается в виде (см. на рис. 2.11)

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0\,.$$

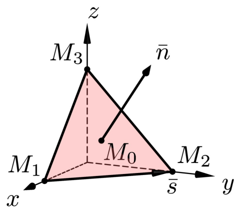


Рис. 2.11. Плоскость в пространстве

Оно вытекает из условия ортогональности векторов $\bar{n}$ и $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, где $M(x, y, z)$ — произвольная точка данной плоскости. Обозначив $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, получим *общее уравнение плоскости* в пространстве:

$$Ax + By + Cz + D = 0\,.$$

Если прямая параллельна вектору $\bar{s} = (l, m, p)$ (называемому *направляющим* вектором) и проходит через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, то её уравнения из условия коллинеарности векторов $\bar{s}$ и $\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, где $M(x, y, z)$ — произвольная точка этой прямой, примут вид

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{p}.$$

Эти уравнения называются *каноническими уравнениями прямой линии в пространстве.*

Уравнение прямой, проходящей через две точки пространства $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, записывается в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\,.$$

Направляющий вектор этой прямой $\bar{s} = (l, m, p)$ имеет координаты, равные соответственно $l = x_2 - x_1$, $m = y_2 - y_1$ и $p = z_2 - z_1$.

Интерпретируя координаты точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$ как координаты трёх радиус-векторов $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, $\bar{r}_3$ и используя условие *компланарности* векторов $\bar{r} - \bar{r}_1$, $\bar{r}_2 - \bar{r}_1$, $\bar{r}_3 - \bar{r}_1$, получим запись уравнения плоскости, проходящей через эти точки, в виде определителя третьего порядка:

[6] В пространстве *нормальным* называется ненулевой вектор $\bar{n}$, перпендикулярный к данной плоскости.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

где $\overline{r}$ — радиус-вектор текущей точки $M(x,y,z)$, лежащей в искомой плоскости.

Пример 2.4. Даны координаты вершин пирамиды:

$$A(0,0,1), \quad B(2,3,5), \quad C(6,2,3), \quad D(3,7,2)\,.$$

Требуется: 1) вычислить координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ в базисе $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ и найти модули этих векторов; 2) определить угол между векторами $\overline{AB}$, $\overline{AC}$; 3) найти проекцию вектора $\overline{AD}$ на вектор $\overline{AB}$; 4) найти площадь грани ABC; 5) найти объём пирамиды $ABCD$; 6) составить уравнение ребра AC и грани ABC.

► **1.** Вычислим координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ в базисе $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$. Воспользовавшись координатами заданных точек, запишем векторы

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= (2-0)\,\overline{i} + (3-0)\,\overline{j} + (5-1)\,\overline{k} = 2\,\overline{i} + 3\,\overline{j} + 4\,\overline{k}\,; \\ \overline{AC} &= (6-0)\,\overline{i} + (2-0)\,\overline{j} + (3-1)\,\overline{k} = 6\,\overline{i} + 2\,\overline{j} + 2\,\overline{k}\,; \\ \overline{AD} &= (3-0)\,\overline{i} + (7-0)\,\overline{j} + (2-1)\,\overline{k} = 3\,\overline{i} + 7\,\overline{j} + \overline{k}\,. \end{aligned}$$

Тогда модули найденных векторов можно выразить как:

$$\begin{aligned} |\,\overline{AB}\,| &= \sqrt{2^2+3^2+4^2} = \sqrt{29}\,; \\ |\,\overline{AC}\,| &= \sqrt{6^2+2^2+2^2} = 2\sqrt{11}\,; \\ |\,\overline{AD}\,| &= \sqrt{3^2+7^2+1^2} = \sqrt{59}\,. \end{aligned}$$

2. Определим угол между векторами $\overline{AB}$, $\overline{AC}$. Известно, что косинус угла φ между двумя известными векторами может быть вычислен как отношение

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{|\,\overline{AB}\,|\cdot|\,\overline{AC}\,|} = \frac{2\cdot 6 + 3\cdot 2 + 4\cdot 2}{2\cdot\sqrt{29}\cdot\sqrt{11}} \approx 0{,}7279 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \approx \arccos 0{,}7279 \approx 43^\circ\,.$$

3. Проекцию вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ можно вычислить

$$\text{пр}_{\overline{b}}\,\overline{a} = \frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\,\overline{b}\,|}\,.$$

В нашем случае

$$\text{пр}_{\overline{AB}}\,\overline{AD} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{|\,\overline{AB}\,|} = \frac{2\cdot 3+3\cdot 7+4\cdot 1}{\sqrt{29}} = \frac{31}{\sqrt{29}}\,.$$

4. Найдём площадь грани ABC. Для нахождения площади треугольника, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, воспользуемся формулой

$$S = \frac{1}{2}\,|\,\overline{a}\times\overline{b}\,|\;,$$

где $\overline{a}\times\overline{b}$ — векторное произведение двух векторов. В координатной форме векторное произведение можно записать как определитель третьего порядка

$$\overline{a}\times\overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

В нашем примере площадь грани ABC буде равна:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|\overline{AB}\times\overline{AC}|\,.$$

Вычислим векторное произведение

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\,\overline{i} + 20\,\overline{j} - 14\,\overline{k}\,.$$

Тогда модуль векторного произведения равен

$$|\overline{AB}\times\overline{AC}| = \sqrt{(-2)^2+20^2+(-14^2)} = 10\sqrt{6}\,.$$

Таким образом,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{6} = 5\sqrt{6}\ \text{кв. ед.}$$

5. Найдём объём пирамиды $ABCD$. Для нахождения объёма пирамиды, построенной на трёх некомпланарных векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ воспользуемся формулой

$$V = \frac{1}{6}|(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}|\,,$$

где $(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}$ — смешанное произведение векторов. В координатной форме смешанное произведение можно записать как определитель третьего порядка

$$(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

В нашем случае объём пирамиды $ABCD$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}|(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD}|\,.$$

Вычислим смешанное произведение векторов

$$(\overline{AB} \times \overline{AC}) \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-12) - 3 \cdot 0 + 4 \cdot 36\,.$$

Таким образом

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot 120 = 20 \text{ куб. ед.}$$

6. Составим уравнение ребра AC. Известно, что уравнения прямой, проходящей через две заданные точки пространства $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, имеют вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\,.$$

Подставив в него координаты точек A и C, получаем

$$\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-0}{2-0} = \frac{z-1}{3-1} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x}{6} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}\,.$$

Окончательный вид уравнений ребра AC:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}\,.$$

Составим уравнение грани ABC. Известно, что уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки пространства $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, в матричном виде можно записать

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Подставляя в это уравнение координаты точек A, B и C, получаем

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 2-0 & 3-0 & 5-1 \\ 6-0 & 2-0 & 3-1 \end{vmatrix} = 0\,; \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Раскладывая последний определитель по первой строке, получаем искомое уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки пространства A, B и C

$$x\,(-2) - y\,(-20) + (z-1)\,(-14) = 0\,; \qquad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \qquad -x + 10y - 7z + 7 = 0\,. \qquad \blacktriangleleft$$

2.8. Контрольные вопросы

1. Какая прямая называется координатной осью? Что называется координатой точки на прямой?
2. Что называется декартовой прямоугольной системой координат: а) на плоскости; б) в пространстве?
3. Как определяется расстояние между двумя точками: а) на прямой; б) на плоскости; в) в пространстве?
4. Что называется вектором? Какие векторы называются: а) коллинеарными; б) линейно зависимыми; в) компланарными?
5. Что называется базисом: а) на прямой; б) на плоскости; в) в пространстве? Что называется разложением вектора по базису? Чем являются координаты вектора в базисе $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$?
6. Что называется скалярным произведением двух векторов? Чему равно скалярное произведение двух единичных векторов? Запишите условие ортогональности двух ненулевых векторов.
7. Как записывается скалярное произведение двух векторов, заданных в координатной форме?
8. Что называется векторным произведением двух векторов? Чему равно векторное произведение двух единичных векторов? Запишите условие коллинеарности двух ненулевых векторов.
9. Как записывается векторное произведение двух векторов, заданных в координатное форме?
10. Что называется смешанным произведением трёх векторов? Чему равно смешанное произведение трёх единичных векторов? Запишите условие компланарности трёх ненулевых векторов.
11. Как записывается смешанное произведение трёх векторов, заданных в координатной форме?
12. Как называется вектор: а) перпендикулярный заданной прямой; б) параллельный заданной прямой?
13. Запишите уравнение прямой, проходящей через заданную точку: а) перпендикулярно заданному вектору; б) параллельно заданному вектору.
14. Запишите уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.
15. Что называется угловым коэффициентом прямой? Запишите урав-

нение прямой, проходящей через заданную точку плоскости с известным угловым коэффициентом.

16. Какой вид имеет уравнение прямой: а) параллельной оси Ox; б) параллельной оси Oy; в) совпадающей с осью Ox; г) совпадающей с осью Oy?
17. В каком случае вектор называют нормальным вектором плоскости? Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку пространства и имеющей заданный нормальный вектор. Какой вид имеют общие уравнения координатных плоскостей?
18. Запишите уравнения прямой, проходящей через две заданные точки пространства.
19. Запишите уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки пространства.
20. Какие линии второго порядка вы знаете?
21. Что называется полуосями эллипса и гиперболы? Какие точки называются фокусами эллипса и гиперболы?
22. Какие линии называются асимптотами гиперболы?
23. Какая точка называется фокусом параболы? Какая линия называется директрисой параболы?

Глава 3

Введение в анализ функций одной переменной

3.1. Предел последовательности

Если каждому натуральному числу $n \in \mathbb{N}$ поставлено в соответствие некоторое вещественное число $x_n \in \mathbb{R}$, то говорят, что задана *числовая последовательность* $\{x_n\}$

$$x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n,\, \ldots$$

Проще говоря, числовая последовательность есть функция натурального аргумента

$$x_n = f(n).$$

Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_ε, что для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Формально этот факт записывается в виде

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad \text{или} \qquad x_n \to a \;\text{ при }\; n \to \infty\,.$$

Т.е., начиная с некоторого номера (n_ε) члены последовательности $\{x_n\}$ как угодно мало отличаются от числа a.

Последовательность, для которой существует конечный предел a, называют *сходящейся*. В противном случае говорят, что последовательность *расходится*. Пример сходящейся последовательности x_n показан на рис. 3.1.

Последовательность называется *ограниченной*, если существует константа M такая, что $|x_n| < M$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Если число a является пределом последовательности, то для всех $n \geqslant n_\varepsilon$ члены последовательности x_n будут принадлежать интервалу $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, называемому *$\varepsilon$-окрестностью точки a* (см. рис. 3.1). Другими словами в ε-окрестности предела последовательности $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ содержится бесконечное множество членов этой последовательности, а вне ε-окрестности содержится лишь конечное их число.

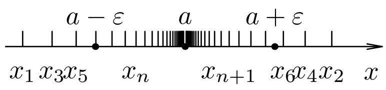


Рис. 3.1. Предел последовательности $x_n \to a$ при $n \to \infty$

Одной из наиболее известных числовых последовательностей является последовательность

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Предел этой последовательности представляет собой иррациональное число, принятое за основание натуральных логарифмов и обозначаемое как e — *число Эйлера*:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718281828459045\ldots$$

3.2. Функция одной переменной

Если каждому элементу x из некоторого множества X по определённому правилу f ставится в соответствие единственный элемент y из множества Y, то говорят, что *задана функция*. Обозначается этот факт как $y = f(x)$.

Переменная величина x называется *аргументом* или *независимой переменной*, а переменная величина y — *функцией* или *зависимой переменной*.

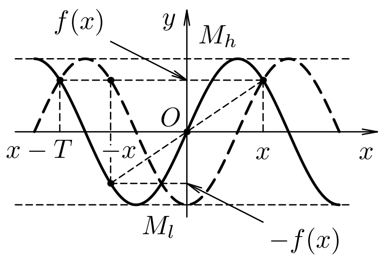


Рис. 3.2. Графики ограниченных периодических функций

Множество X называется *областью определения функции*, а множество Y — *областью значений функции* $y = f(x)$, если для всякого $y \in Y$ найдётся такое $x \in X$, что значение функции f в точке x равняется y. Говорят также, что *функция f отображает* множество X на множество Y. Область определения функции будем обозначать как $D(y)$, а область её значений — $E(y)$. *Графиком функции* $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости Oxy, координаты которых можно представить в виде $M(x; f(x))$. Примеры графиков функций показаны на рис. 3.2.

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной на множестве* X, если существует такое $M \geqslant 0$, что $|f(x)| \leqslant M$ для всех $x \in X$. Причём, если функция *ограничена снизу*, то верно неравенство $f(x) \geqslant M_l$, а если функция *ограничена сверху*, то верно неравенство $f(x) \leqslant M_h$.

Если множество X *симметрично* относительно точки $x = 0$ и функция $y = f(x)$ удовлетворяет условию $f(-x) = f(x)$, то функция называется *чётной* (см. штриховую линию на рис. 3.2), а если $f(-x) = -f(x)$, то *нечётной* (см. сплошную линию на рис. 3.2). Если существует такое число $T > 0$, что $f(x \pm T) = f(x)$ для всех $x \in X$, то функция $y = f(x)$ называется *периодической* (см. оба графика на рис. 3.2), а наименьшее из чисел T называется её *периодом*.

Чтобы *определить функцию* $y = f(x)$, необходимо *указать правило*, позволяющее находить её значения y по известным значениям аргумента x. *Аналитическим* называется *способ* задания функции с помощью одной или нескольких формул.

Например:

$$y = \sin\left(x^2 + 1\right)\,, \qquad y = \begin{cases} -x & \text{при} \quad x < 0\,; \\ x & \text{при} \quad x \geqslant 0\,. \end{cases}$$

Аналитический способ определения функции является наиболее совершенным, так как позволяет не только сравнительно легко находить значения функции $y = f(x)$, но и в полной мере использовать весь арсенал методов математического анализа для исследования её свойств.

Используются также *табличный* и *графический способы* задания функции.

3.3. Предел функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, кроме быть может самой точки $x = a$.

Определение предела функции. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ *в точке* $x = a$ при x стремящимся к a, если для любого положительного числа ε найдётся такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Геометрическая интерпретация определения предела функции в точке $x = a$ состоит в том, что для всех x, достаточно близких к a значение функции $f(x)$ как угодно мало отличаются от числа A.

В более компактной форме факт существования предела функции в точке можно записать так:

$$f(x) \to A \quad \text{при} \quad x \to a \qquad \text{или} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = A\,.$$

Свойства пределов функций. Будем считать, что пределы функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ при $x \to a$ существуют. Тогда выполняются следующие свойства.

1. *Предел суммы или разности* двух функций равен сумме или разности их пределов:

$$\lim_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)\,.$$

2. Функция может иметь *только один предел* при $x \to a$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A\,, \quad \lim_{x \to a} f(x) = B \quad \Rightarrow \quad A = B\,.$$

3. *Предел произведения* двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)\,.$$

4. *Постоянный множитель* можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \to a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)\,.$$

5. *Предел степени с натуральным показателем* равен той же степени предела:

$$\lim_{x \to a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^n\,.$$

6. *Предел дроби* равен пределу числителя, делённому на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} \quad \text{при} \quad \lim_{x \to a} g(x) \neq 0\,.$$

7. Если в окрестности точки $x = a$ *значения* первой функции *меньше значений* второй, то и *предел* первой функции *не превосходит предела* второй при $x \to a$:

$$f(x) < g(x) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} f(x) \leqslant \lim_{x \to a} g(x)\,.$$

8. Если $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u_0$, то и предел сложной функции $\lim\limits_{x \to x_0} f[u(x)] = A$.

Если функция $y = f(x)$ определена на промежутке $(-\infty, \infty)$, то число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to \infty$, если для любого положительного числа ε найдётся такое положительное число $M = M(\varepsilon)$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. В более компактной форме факт существования предела функции при $x \to \infty$ можно записать так:

$$f(x) \to A \quad \text{при} \quad x \to \infty \qquad \text{или} \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

Число A_l называется *пределом функции* $y = f(x)$ *слева в точке* $x = a$, если для любого положительного числа ε найдётся такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что при $x \in (a - \delta, a)$ выполняется неравенство $|f(x) - A_l| < \varepsilon$. В более компактной форме факт существования левостороннего предела функции в точке можно записать так:

$$f(x) \to A_l \quad \text{при} \quad x \to a - 0 \qquad \text{или} \qquad \lim_{x \to a-0} f(x) = A_l\,.$$

Число A_r называется *пределом функции* $y = f(x)$ *справа в точке* $x = a$, если для любого положительного числа ε найдётся такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что при $x \in (a, a + \delta)$ выполняется неравенство $|f(x) - A_r| < \varepsilon$. В более компактной форме факт существования правостороннего предела функции в точке можно записать так:

$$f(x) \to A_r \quad \text{при} \quad x \to a + 0 \qquad \text{или} \qquad \lim_{x \to a+0} f(x) = A_r\,.$$

3.4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$, если для любого положительного числа ε найдётся такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$. В более компактной форме это можно записать так:

$$f(x) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to a \qquad \text{или} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = 0\,.$$

Например, функции $y = x^3 - 8$ при $x \to 2$, $y = \sin x$ при $x \to 0$ являются бесконечно малыми.

Определение *бесконечно малой* функции $f(x) \to 0$ при условиях: $x \to a + 0$, $x \to a - 0$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, строится аналогично.

Основные свойства бесконечно малых функций

1. *Алгебраическая сумма* конечного числа бесконечно малых функций $\alpha_i(x)$ есть бесконечно малая функция:
$$\lim_{x\to a}\alpha_i(x)=0 \quad \text{при} \quad i=1,2,\ldots,n \qquad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to a}\left(\alpha_1(x)+\alpha_2(x)+\ldots+\alpha_n(x)\right)=0\,.$$

2. *Произведение* на ограниченную функцию $f(x)$ (в т.ч. на константу или другую бесконечно малую) бесконечно малой функции $\alpha(x)$ есть бесконечно малая функция:
$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0\,, \quad \lim_{x\to a}f(x)=M<\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a}\left(\alpha(x)\cdot f(x)\right)=0\,.$$

3. *Частное* от деления бесконечно малой функции $\alpha(x)$ на функцию $f(x)$, имеющую ненулевой предел, есть бесконечно малая функция:
$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0\,, \quad \lim_{x\to a}f(x)\neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{f(x)}=0\,.$$

4. Если функция $f(x)$ имеет *предел*, равный A, то её можно представить как сумму числа A и бесконечно малой функции $\alpha(x)$ и наоборот:
$$\lim_{x\to a}f(x)=A \quad \Leftrightarrow \quad f(x)=A+\alpha(x)\,, \quad \lim_{x\to a}\alpha(x)=0\,.$$

Функция $y=\beta(x)$ называется *бесконечно большой* при $x\to a$, если для любого положительного числа M найдётся такое положительное число $\delta=\delta(M)$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|\beta(x)|>M$. В более компактной форме это можно записать так:
$$\beta(x)\to\infty \quad \text{при} \quad x\to a \qquad \text{или} \qquad \lim_{x\to a}\beta(x)=\infty\,.$$

Если бесконечно большая функция принимает только положительные ($\beta(x)>0$) или только отрицательные значения ($\beta(x)<0$), то пишут:
$$\lim_{x\to a}\beta(x)=+\infty \qquad \text{или} \qquad \lim_{x\to a}\beta(x)=-\infty\,.$$

Например, функции $y=\operatorname{ctg}x$ при $x\to 0$, $y=\sqrt{2x+3}$ при $x\to\infty$ являются бесконечно большими.

Функция $y=\beta(x)$, заданная на всей числовой прямой, называется *бесконечно большой* при $x\to\infty$, если для любого положительного числа M найдётся такое положительное число $N=N(M)$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x|>N$, выполняется неравенство $|\beta(x)|>M$. В более компактной форме это можно записать так:

$$\beta(x) \to \infty \quad \text{при} \quad x \to \infty \qquad \text{или} \qquad \lim_{x\to\infty} \beta(x) = \infty\,.$$

Основные свойства бесконечно больших функций

Пусть $\beta(x)$ — бесконечно большая функция: $\lim\limits_{x\to a} \beta(x) = \infty$.

1. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = M < \infty$, то $\lim\limits_{x\to a}(\beta(x)\cdot f(x)) = \infty$.
2. Если $|f(x)| < M < \infty$, то $\lim\limits_{x\to a}(\beta(x) + f(x)) = \infty$.
3. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\beta(x)}{f(x)} = \infty$.
4. *Функция, обратная* к бесконечно малой $\alpha(x)$, есть бесконечно большая функция и наоборот:

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x\to a} \frac{1}{\alpha(x)} = \infty\,;$$

$$\lim_{x\to a} \beta(x) = \infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x\to a} \frac{1}{\beta(x)} = 0\,.$$

Очевидно, что сумма и произведение бесконечно больших функций есть функция бесконечно большая. Однако разность и частное двух бесконечно больших величин зависит от их характера. Также отношение двух бесконечно малых или бесконечно больших функций может вести себя различным образом в зависимости от их характера. Поэтому такие выражения называют неопределённостями. Выяснение чему в конкретном случае равен предел неопределённости называют *раскрытием неопределённости.*

Приёмы раскрытия неопределённостей

Первый и второй замечательные пределы

1. При вычислении пределов выражений с тригонометрическими функциями удобно использовать *первый замечательный предел* и его *следствие*:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1\,.$$

2. При вычислении пределов выражений с показательно-степенными функциями также используется *второй замечательный предел* в различных формах:

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e\,, \qquad \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e\,.$$

Предел отношения многочленов в бесконечно удалённой точке

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m}=\frac{\infty}{\infty}=\begin{cases}\infty, & \text{если}\quad n>m\,;\\ \dfrac{a_n}{b_m}, & \text{если}\quad n=m\,;\\ 0, & \text{если}\quad n<m\,.\end{cases}$$

Пример 3.1. Найти указанный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-4}{3x^3-2x+5}$.

► В данном пределе при $x\to\infty$ числитель и знаменатель дроби — многочлены неограниченно возрастают, т.е. мы сталкиваемся с неопределённостью вида

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_3(x)}{Q_3(x)}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}.$$

Освобождение от неопределённости такого вида возможно с помощью формулы предела отношения многочленов.

В нашем случае старшие степени числителя и знаменателя дроби совпадают: $n=m=3$. Следовательно, работает вторая строка формулы, по которой предел отношения многочленов равен отношению коэффициентов при старших степенях: $a_n=2$, $b_m=3$.

Отсюда раскрываем неопределённость:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x^2-4}{3x^3-2x+5}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\frac{2}{3}.\qquad ◄$$

Пример 3.2. Найти указанный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-x\right)$.

► В данном пределе при $x\to\infty$ оба слагаемых неограниченно возрастают, т.е. мы сталкиваемся с неопределённостью вида

$$\lim_{x\to\infty}\Big(p(x)-q(x)\Big)=\{\infty-\infty\}.$$

Освобождение от неопределённости такого вида возможно путём умножения выражения на сопряжённое с использованием формулы разности квадратов. В нашем случае исходное выражение следует умножить на $\sqrt{x+3}+x$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+3}-x\right)\left(\sqrt{x+3}+x\right)}{\sqrt{x+3}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+3-x^2}{\sqrt{x+3}+x}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}.$$

Проведённые преобразования приводят нас к новой неопределённости вида $\{\frac{\infty}{\infty}\}$. Поделим числитель и знаменатель дроби на старшую из степеней x, т.е. на x^2. Используя свойства пределов, получим предел заданного выражения:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+3-x^2}{\sqrt{x+3}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}-1}{\sqrt{\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^4}}+\frac{1}{x}}=\frac{0+0-1}{\sqrt{0+0}+0}=-\infty\,. \blacktriangleleft$$

Пример 3.3. Найти указанный предел $\lim\limits_{x\to-4}\frac{x^2+3x-4}{x^2+2x-8}$.

► В данном пределе при $x\to-4$ числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю, т.е. мы сталкиваемся с неопределённостью вида

$$\lim_{x\to-4}\frac{p(x)}{q(x)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

Для освобождения от неопределённости такого вида разложим числитель и знаменатель на множители по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$. Учитывая, что и числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль при $x_1=-4$, второй корень каждого трёхчлена можно определить с помощью следствия из теоремы Виета $x_2=-x_1-b/a$. В таком случае числитель и знаменатель могут быть записаны как:

$$x_2=4-3/1=1 \quad\Rightarrow\quad x^2+3x-4=(x+4)\,(x-1)\,;$$
$$x_2=4-2/1=2 \quad\Rightarrow\quad x^2+2x-8=(x+4)\,(x-2)\,.$$

Тогда предел исходного выражения будет равен

$$\lim_{x\to-4}\frac{x^2+3x-4}{x^2+2x-8}=\lim_{x\to-4}\frac{(x+4)\,(x-1)}{(x+4)\,(x-2)}=$$
$$=\lim_{x\to-4}\frac{x-1}{x-2}=\frac{-4-1}{-4-2}=\frac{5}{6}\,. \quad\blacktriangleleft$$

Пример 3.4. Найти указанный предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{(x+1)^3}-1}{3x}$.

► В данном пределе при $x\to0$ числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю, т.е. мы сталкиваемся с неопределённостью вида

$$\lim_{x\to0}\frac{p(x)}{q(x)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

Для освобождения от неопределённости такого вида вначале избавимся от иррациональности. Для этого выполним замену $t^2=x+1$ или $x=t^2-1$. Заметим, что условие предельного перехода изменится с $x\to0$ на $t\to1$:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{(x+1)^3}-1}{3x}=\lim_{t\to1}\frac{t^3-1}{3(t^2-1)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

Теперь разложим числитель и знаменатель на множители и найдём предел искомого выражения:

$$\lim_{t\to1}\frac{t^3-1}{3(t^2-1)}=\lim_{t\to1}\frac{(t-1)(t^2+t+1)}{3(t-1)(t+1)}=$$
$$=\lim_{t\to1}\frac{t^2+t+1}{3(t+1)}=\frac{1+1+1}{3(1+1)}=\frac{1}{2}. \quad ◄$$

Пример 3.5. Найти указанный предел $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot\sin x}{\operatorname{tg}^2 4x\cdot\cos 2x}$.

► В данном пределе при $x\to0$ числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю, т.е. мы сталкиваемся с неопределённостью вида

$$\lim_{x\to0}\frac{u(x)}{v(x)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

Освободиться от неопределённости такого вида можно с помощью первого замечательного предела и/или его очевидного следствия:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad\Rightarrow\qquad \lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1.$$

Таким образом, для решения нашего примера необходимо разложить заданную дробь на ряд множителей вышеуказанного вида: функция (синус или тангенс), делённая на аргумент функции:

$$\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\sin x}{\operatorname{tg}^2 4x\cdot\cos 2x}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\sin x}{\operatorname{tg}4x\cdot\operatorname{tg}4x\cdot\cos 2x}=$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{4x}{\operatorname{tg}4x}\cdot\frac{4x}{\operatorname{tg}4x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos 2x}\cdot\frac{1}{16}\right)=1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{16}.$$

Заметим, что функции вида $\cos kx$ в данном случае играют роль константы, так как предел $\cos x$ при $x\to0$ равен единице. ◄

Пример 3.6. Найти указанный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x+11}\right)^{-x}$.

► Вначале выделим целую часть дроби, находящейся в основании показательно-степенной функции:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x+11}\right)^{-x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+11}{x+8}\right)^{x} =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+8-8+11}{x+8}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x+8}\right)^{x}.$$

В данном пределе при $x \to \infty$ основание показательно-степенной функции (в скобках) стремится к единице, а её показатель — к бесконечности, т.е. мы сталкиваемся с неопределённостью вида

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{p(x)}{q(x)}\right)^{r(x)} = \{1^\infty\}.$$

Освободиться от неопределённости такого вида можно с помощью второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e\,.$$

Выполним замену переменной $t = \frac{1}{3}(x+8)$ или $x = 3t-8$. Заметим, что условие предельного перехода $x \to \infty$ при этом не изменится. После этого преобразуем полученное выражение и найдём искомый предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x+8}\right)^{x} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t-8} =$$
$$= \left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{t}\right)^{t}\right)^{3} \Big/ \lim_{t\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{t}\right)^{8} = e^3/1^8 = e^3. \quad \blacktriangleleft$$

3.5. Непрерывность функции

Определение I. Функция $y = f(x)$, определённая в окрестности точки $x = a$, называется *непрерывной в точке* a, если существует предел функции при $x \to a$ и он равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)\,.$$

Из определения предела следует, что бесконечно малому приращению аргумента x соответствует бесконечно малое приращение функции $f(x)$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0\,,$$

где $\Delta x = x - a$ — приращение аргумента; $\Delta y = f(x) - f(a)$ — приращение функции. Пример графика функции $y = f(x)$, непрерывной в точке $x = a$ показан на рис. 3.3, а.

Определение II. Функция $y = f(x)$, определённая в окрестности точки $x = a$, называется непрерывной в точке a, если существуют односторонние пределы функции при $x \to a \pm 0$ и они равны значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a+0} f(x)\,.$$

Свойства функций, непрерывных в точке

1. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны в точке a, то непрерывными в этой точке являются и функции: $y = c \cdot f(x)$, $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) \cdot g(x)$, $y = f(x)/g(x)$ при условии, что $g(a) \neq 0$.
2. Если функция $y = g(x)$ непрерывна в точке a, а функция $z = f(y)$ непрерывна в точке $b = g(a)$, то сложная функция $z = f(g(x))$ также непрерывна в точке a.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на интервале* (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна в каждой внутренней точке соответствующего интервала, а на концах отрезка непрерывность определяется односторонними пределами:

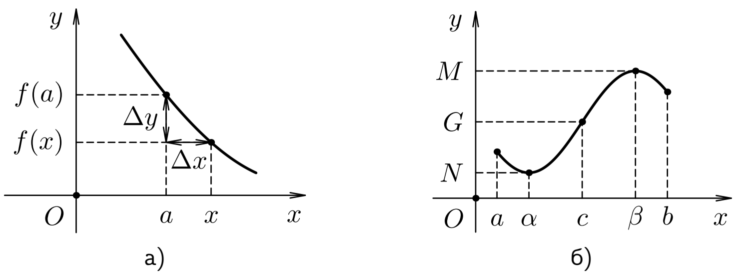


Рис. 3.3. Графики функций, непрерывных: а) в точке $x = a$; б) на отрезке $x \in [a, b]$

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a)\,, \qquad \lim_{x\to b-0} f(x) = f(b)\,.$$

Все *основные элементарные функции* непрерывны при всех значениях аргумента x, для которых они определены. Более того, всякая *элементарная функция* непрерывна в каждой точке, в которой она определена. Заметим, что *основными элементарными функциями* считаются: степенные x^n, показательные a^x, логарифмические $\log_a x$, тригонометрические $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ и обратные тригонометрические $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ функции. Свойства основных элементарных функций описаны в приложении Б.8. При этом *элементарной* называется всякая функция, которую можно задать одной формулой с применением конечного числа арифметических действий и суперпозиций (операций образования сложной функции) над основными элементарными функциями.

Величины M и N называются *наибольшим* и *наименьшим* значениями функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если на этом отрезке существуют такие значения аргумента функции $x = \alpha$ и $x = \beta$, что для всех $x \in [a, b]$ верно:

$$f(\alpha) = N \leqslant f(x) \leqslant M = f(\beta)\,.$$

Пример графика функции $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $x \in [a, b]$ показан на рис. 3.3, б.

Теорема Вейерштрасса. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке и достигает на этом отрезке своего наибольшего (M) и наименьшего (N) значений.

Теорема Больцано–Коши. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для всякого значения $G \in [N; M]$ найдётся точка $c \in [a, b]$ такая, что $f(c) = G$ (см. рис. 3.3, б).

Следствие. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то найдётся хотя бы одна точка $c \in [a, b]$ такая, что $f(c) = 0$.

Точки разрыва

Точки $x = a$, в которых нарушается хотя бы одно условие непрерывности функции $y = f(x)$, называются *точками разрыва* этой функции. Все точки разрыва функции $y = f(x)$ разделяются на точки *устранимого разрыва первого рода*, точки *конечного* или *неустранимого разрыва первого рода* и точки *бесконечного разрыва* или *разрыва второго рода*.

1. Функция $y = f(x)$ определена в точке $x = a$ и её окрестности, существует предел $f(x)$ при $x \to a$, но этот предел не равен значению функции в предельной точке $f(x) \neq f(a)$ при $x \to a$. В этом случае точку $x = a$ называют точкой *устранимого разрыва первого рода.* Например, функция

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{при} \quad x \neq 0\,, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0 \end{cases}$$

имеет в точке $x = 0$ устранимый разрыв первого рода (см. рис. 3.4, а), так как $g(0) = 0$ и в то же время:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

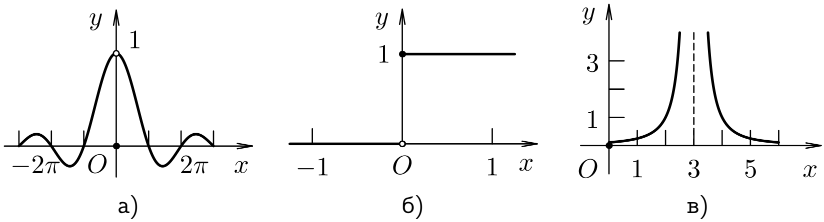


Рис. 3.4. Графики функций: а) $y = g(x)$ с устранимым разрывом при $x = 0$; б) $y = h(x)$ с конечным разрывом при $x = 0$ в) $y = p(x)$ с бесконечным разрывом при $x = 3$

2. Функция $y = f(x)$ определена в точке $x = a$ и её окрестности, но не существует предела $f(x)$ при $x \to a$, так как односторонние пределы в этой точке существуют, но не равны друг другу. В этом случае точку $x = a$ называют точкой *конечного* или *неустранимого разрыва первого рода.* Например, функция

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad -\infty < x < 0\,, \\ 1 & \text{при} \quad 0 \leqslant x < \infty \end{cases}$$

имеет в точке $x = 0$ конечный разрыв первого рода (см. рис. 3.4, б). Действительно, функция определена в точке $x = 0$, однако её односторонние пределы в этой точке не равны друг другу:

$$\lim_{x\to 0-0} h(x) = 0\,, \qquad \lim_{x\to 0+0} h(x) = 1\,.$$

3. Функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки $x = a$, но не определена в самой точке a. Это происходит когда хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x)$ в точке a не существует или равен бесконечности. В этом случае точку $x = a$ называют точкой *бесконечного разрыва* или *разрыва второго рода*. Например, функция

$$p(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$$

имеет бесконечный разрыв в точке $x = 3$ (см. рис. 3.4, в), так как оба односторонних предела при $x \to 3 \pm 0$ равны бесконечности:

$$\lim_{x \to 3 \pm 0} p(x) = \lim_{x \to 3 \pm 0} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty\,.$$

Асимптоты графика функции

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называют прямую, к которой приближается точка графика $M(x, f(x))$ при неограниченном её удалении от начала координат.

Прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из её односторонних пределов в точке $x = a$ равен бесконечности. Исходя из определения заключаем, что вертикальные асимптоты существуют у функций, имеющих точки бесконечного разрыва.

Например, график функции $p(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 3$ (см. рис.3.4, в).

Прямая $y = kx + b$ является *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если конечны пределы:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx).$$

Пример 3.7. Найти асимптоты графика функции

$$y = \frac{x^2 - 3x}{2x + 1}.$$

► Так как функция непрерывна на всей оси, кроме точки $x = -\frac{1}{2}$, то вертикальная асимптота может существовать лишь в этой точке:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2} - 0} \frac{x^2 - 3x}{2x + 1} = \frac{(-\frac{1}{2} - 0)^2 - 3(-\frac{1}{2} - 0)}{2(-\frac{1}{2} - 0) + 1} = \frac{\frac{7}{4}}{-0} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2} + 0} \frac{x^2 - 3x}{2x + 1} = \frac{(-\frac{1}{2} + 0)^2 - 3(-\frac{1}{2} + 0)}{2(-\frac{1}{2} + 0) + 1} = \frac{\frac{7}{4}}{+0} = \infty,$$

и, следовательно, прямая $x = -\frac{1}{2}$ — вертикальная асимптота.

Найдём наклонные асимптоты. Так как

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3x}{(2x+1)\cdot x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 3x}{2x^2 + x} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - 3x}{2x+1} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 6x - (2x^2 + x)}{(2x+1)\cdot 2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-7x}{4x+2} = -\frac{7}{4},$$

то прямая

$$y = k\,x + b = \frac{1}{2}\,x - \frac{7}{4}$$

является наклонной асимптотой. ◄

3.6. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определения: а) числовой последовательности; б) предела последовательности.
2. Какая последовательность называется: а) сходящейся; б) ограниченной?
3. Может ли последовательность иметь два предела?
4. Чему равен предел суммы и произведения двух сходящихся числовых последовательностей?
5. Как определяется число e? В каком случае говорят, что последовательность имеет бесконечный предел?
6. Что называется функцией? Какие способы задания функции существуют?
7. Какие множества называются областью определения и областью значений функции $y = f(x)$?
8. Приведите определение функции: а) четной; б) нечетной; в) периодической.
9. Приведите определение предела функции в точке. Поясните на примерах свойства пределов функций.
10. Приведите определения: а) право- и левостороннего пределов функции в точке; б) предела функции при $x \to \infty$.
11. Что называется бесконечно большой и бесконечно малой функциями? Перечислите основные свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций.
12. Какие замечательные пределы вам известны?
13. Какая функция называется непрерывной в точке?

14. Как найти предел отношения многочленов при неограниченном возрастании переменной?
15. Сохраняется ли непрерывность в точке для суммы, произведения и частного двух непрерывных в этой точке функций? Каковы условия непрерывности в точке для сложной функции?
16. Какая функция называется непрерывной на отрезке? Может ли быть непрерывной неограниченная на отрезке функция?
17. Какие функции называются: а) элементарными; б) основными элементарными?
18. Какие типы точек разрыва функции существуют?
19. На каком множестве непрерывны следующие функции:
а) $y = e^x$; б) $y = \sqrt{x}$; в) $y = \log_2 x$?
20. Дайте определение асимптоты кривой. Как найти вертикальные и наклонные асимптоты графика функции?

Глава 4

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

4.1. Определение производной функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале значений аргумента $x \in (a; b)$. Дадим аргументу x приращение Δx такое, что $x + \Delta x \in (a; b)$ и найдём соответствующее приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Если существует предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, при произвольном стремлении последнего к нулю

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)\,,$$

то он называется *производной функции* $y = f(x)$ в точке x и обозначается как: $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$ или $y'_x = \frac{dy}{dx}$.

Если функция $y = f(x)$ имеет в некоторой точке x производную, то говорят, что функция *дифференцируема* в этой точке. Заметим, что *дифференцируемость* функции $y = f(x)$ в точке x является достаточным условием для её *непрерывности* в этой же точке, в то время как *обратное утверждение*, вообще говоря, *неверно*. Например, функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но не дифференцируема в ней.

Геометрический смысл производной. Производная функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ равна угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику функции в данной точке:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \operatorname{tg} \alpha\,,$$

где α — угол наклона касательной к графику функции в данной точке.

Тогда *уравнение касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ будет иметь вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

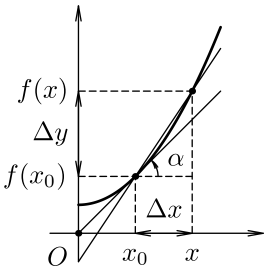


Рис. 4.1. Геометрический смысл производной

Пример взаимного расположения секущей и касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ показан на рис. 4.1.

Механический смысл производной. Предположим, что материальная точка движется вдоль некоторой прямой, а её координата зависит от времени как непрерывная функция $s = f(t)$. Приращению координаты $\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$, полученному за время Δt, будет соответствовать *средняя скорость* движения материальной точки $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Тогда, если существует предел этого отношения

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t) = v(t)\,,$$

то его называют *мгновенной скоростью* материальной точки в момент времени t. С помощью понятия производной в физике характеризуют и другие предельные понятия.

4.2. Производные основных элементарных функций

Нахождение производных (дифференцирование) непосредственно по определению даже для простых элементарных функций часто связано с определёнными трудностями. Поэтому на практике подобные функции дифференцируют с помощью системы специально выведенных правил и формул. Перечень формул для производных основных элементарных функций приведён в приложении Б.10. Производные остальных элементарных функций можно получить, используя эти формулы и основные свойства производной.

Основные свойства производной. Пусть $f = f(x)$ и $g = g(x)$ — две дифференцируемые на некотором интервале $(a; b)$ функции.

1. *Производная суммы (разности)* двух функций $f(x)$ и $g(x)$ *равна сумме (разности)* производных этих функций:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'.$$

2. *Производная произведения* двух функций $f(x)$ и $g(x)$ *равна сумме произведений* производной первой функции на вторую и первой функции на производную второй:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

3. *Постоянную* $c = \mathrm{const}$ можно *выносить за знак* производной:

$$(c \cdot f)' = c \cdot f'.$$

4. *Производная частного* двух функций $f(x)$ и $g(x)$, если делитель не равен нулю, *равна дроби*, числитель которой есть разность произведений знаменателя дроби на производную числителя и числителя дроби на производную знаменателя, а её знаменатель есть квадрат прежнего знаменателя:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \quad \text{если} \quad g \neq 0\,.$$

5. *Производная композиции* или *сложной функции* $f(g(x))$ *равна произведению* производной данной функции f по промежуточной переменной g на производную промежуточной переменной g по независимой переменной x:

$$f'_x = f'_g \cdot g'_x.$$

6. *Производная функции* $\varphi(y)$, *обратной* к данной $f(x)$, *равна величине*, *обратной* к производной данной функции:

$$\varphi'_y = \frac{1}{f'_x}\,.$$

Заметим, что свойства 1, 2 и 5 остаются справедливыми *для любого конечного числа* слагаемых, сомножителей или промежуточных переменных.

Пример 4.1. Найти производную функции $y = 4x + \frac{5}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{6}{x^2} + \frac{8}{\sqrt[3]{x^2}}$, пользуясь основными правилами и формулами дифференцирования.

► Прежде чем дифференцировать функцию, целесообразно упростить её выражение:

$$y = 4x + \frac{5}{3}x^{\frac{3}{4}} - 6x^{-2} + 8x^{-\frac{2}{3}}. \quad \text{Тогда:}$$

$$y' = 4 + \frac{5}{4}x^{-\frac{1}{4}} + 12x^{-3} - \frac{16}{3}x^{-\frac{5}{3}} =$$

$$= 4 + \frac{5}{4\sqrt[4]{x}} + \frac{12}{x^3} - \frac{16}{3\sqrt[3]{x^5}}. \quad ◄$$

Пример 4.2. Найти производную функции $y = 3^{\operatorname{tg} 3x} \cdot \sin 5x$, пользуясь основными правилами и формулами дифференцирования.

► Данная функция представляет произведение двух функций, каждая из которых является сложной функцией. Поэтому

$$y' = \left(3^{\operatorname{tg} 3x}\right)' \cdot \sin 5x + 3^{\operatorname{tg} 3x} \cdot (\sin 5x)' =$$
$$= 3^{\operatorname{tg} 3x} \cdot \ln 3 \cdot \frac{3}{\cos^2 3x} \cdot \sin 5x + 3^{\operatorname{tg} 3x} \cdot 5 \cdot \cos 5x =$$
$$= 3^{\operatorname{tg} 3x} \left(\ln 27 \cdot \frac{\sin 5x}{\cos^2 3x} + 5 \cdot \cos 5x\right). \quad ◄$$

Пример 4.3. Найти производную функции $y = \frac{\cos 7x}{\sqrt{1-3x^4}}$, пользуясь основными правилами и формулами дифференцирования.

► По правилу дифференцирования частного двух сложных функций:

$$y' = \frac{(\cos 7x)' \cdot \sqrt{1-3x^4} - \cos 7x \cdot \left(\sqrt{1-3x^4}\right)'}{\left(\sqrt{1-3x^4}\right)^2} =$$
$$= \frac{-7\sin 7x \cdot \sqrt{1-3x^4} - \dfrac{\cos 7x}{2\sqrt{1-3x^4}} \cdot (-12x^3)}{(1-3x^4)} =$$
$$= \frac{-7\sin 7x \cdot (1-3x^4) + 6x^3 \cdot \cos 7x}{(1-3x^4) \cdot \sqrt{1-3x^4}}. \quad ◄$$

Пример 4.4. Найти производную функции $y = \ln \arcsin 6x$, пользуясь основными правилами и формулами дифференцирования.

► По правилу дифференцирования сложной функции:

$$y' = \frac{1}{\arcsin 6x} \cdot (\arcsin 6x)' =$$
$$= \frac{1}{\arcsin 6x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(6x)^2}} \cdot (6x)' =$$
$$= \frac{1}{\arcsin 6x} \cdot \frac{6}{\sqrt{1-36x^2}}. \quad ◄$$

4.3. Дифференциал функции

Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x отличную от нуля производную $f'(x) \neq 0$, то в соответствии с определением производной, свойствами пределов и бесконечно малых функций приращение этой функции можно записать в виде суммы двух бесконечно малых функций при $\Delta x \to 0$:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x\,.$$

Причем первое слагаемое есть бесконечно малая одного порядка с Δx, а второе слагаемое — бесконечно малая более высокого порядка, так как функция $\alpha(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется *главная часть её приращения*, *линейная относительно* Δx, а так как дифференциал независимой переменной равен её приращению $dx = \Delta x$, то дифференциал функции можно записать в виде:

$$dy = f'(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f'(x)\,.$$

Из последней формулы следует, что производную $\frac{dy}{dx}$ можно обозначать как отношение дифференциала функции dy к дифференциалу независимой переменной dx.

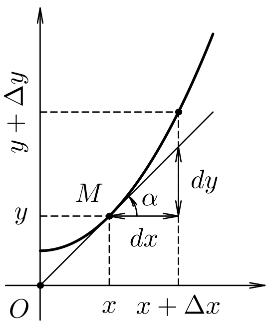


Рис. 4.2. Геометрический смысл дифференциала

Геометрический смысл дифференциала. Построим график функции $y = f(x)$ и проведём касательную к графику в точке $M(x,y)$. Сравнивая ординаты графика функции и его касательной для абсциссы $x + \Delta x$ легко увидеть, что главная часть приращения ординаты Δy линейна относительно приращения абсциссы Δx и определяется тангенсом угла наклона касательной α к графику функции $y = f(x)$, т.е. соответствует дифференциалу этой функции (см. рис. 4.2):

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x = f'(x) \cdot dx = dy\,.$$

Основные свойства дифференциала. Основные свойства дифференциала функции легко получить, используя связь дифференциала с производной функции $dy = f'(x)\,dx$ и основные свойства производной, рассмотренные на стр. 64.

Пример 4.5. Требуется найти дифференциал функции $y = \cos^3 2x$.

$$\blacktriangleright \quad dy = (\cos^3 2x)'\,dx = -6\cos^2 2x\,\sin 2x\,dx\,. \quad \blacktriangleleft$$

Применение дифференциала в приближенных вычислениях. Из определения дифференциала нам уже известно, что приращение любой дифференцируемой функции можно представить в виде: $\Delta y = dy + \alpha(x) \cdot \Delta x$, где $\alpha(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отбрасывая бесконечно малую более высокого порядка, чем Δx, получаем приближенное равенство: $\Delta y \approx dy$, откуда следует, что $y(x + \Delta x) \approx y(x) + dy$. Последнее равенство тем точнее, чем меньше Δx. Так как дифференциал функции во многих случаях находится проще, чем её приращение, то последняя формула получила широкое распространение в вычислительной математике.

4.4. Производные и дифференциалы высших порядков

Производная функции $f'(x)$ сама по себе является функцией независимой переменной x и называется *производной первого порядка*. Если полученная функция $f'(x)$ дифференцируема, то её производная $(f'(x))' = \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right)$ называется *производной второго порядка* и обозначается как:

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2}\,.$$

Производной третьего порядка называется производная от производной второго порядка, если последняя существует и дифференцируема: $(f''(x))' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right)$. Записывается производная третьего порядка в виде

$$y''' = f'''(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3} = \frac{d^3 y}{dx^3}\,.$$

Аналогично, *производной n-го порядка* называется производная от производной $(n-1)$-го порядка, если последняя существует и дифференцируема: $\left(f^{(n-1)}(x)\right)' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}}\right)$. Все производные выше третьего порядка обычно обозначаются в виде верхнего индекса арабскими цифрами в круглых скобках. Так производные четвёртого и n-го порядка могут быть записаны в виде:

$$y^{(4)} = f^{(4)}(x) = \frac{d^4 f(x)}{dx^4} = \frac{d^4 y}{dx^4}\,, \quad \ldots,$$
$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{d^n y}{dx^n}\,.$$

Так как дифференциал функции $dy = df(x) = f'(x)dx$, называемый также *дифференциалом первого порядка*, также является функцией независимой переменной x, то дифференцируя её повторно можно получить выражения для *дифференциалов второго*, *третьего* и *более высоких порядков*:

$$d^2y = d^2f(x) = f''(x)dx^2,$$
$$d^3y = d^3f(x) = f'''(x)dx^3, \quad \ldots,$$
$$d^ny = d^nf(x) = f^{(n)}(x)dx^n.$$

4.5. Теоремы о дифференцируемых функциях

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и на концах отрезка принимает одинаковые значения $f(a) = f(b)$, то найдётся хотя бы одна такая точка $c \in (a;b)$, в которой производная обращается в нуль:

$$f'(c) = 0\,.$$

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$, то найдётся хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ такая, что будет верно равенство:

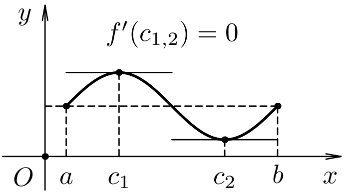
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)\,.$$

Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, дифференцируемы на интервале $(a;b)$, причём $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a;b)$, то найдётся хотя бы одна точка $c \in (a;b)$ такая, что будет верно равенство:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\,.$$

Следствие 1. Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция на этом промежутке постоянна.

Следствие 2. Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.



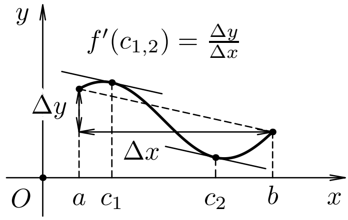


Рис. 4.3. Иллюстрации к теоремам: а) Ролля; б) Лагранжа

4.6. Правило Лопиталя

Некоторые свойства производных оказываются полезны при сравнении бесконечно больших и бесконечно малых величин.

Правило Лопиталя в случае $\{\frac{0}{0}\}$. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки $x = a$ и обращаются в нуль в самой точке: $f(a) = g(a) = 0$, причём $g'(x) \neq 0$ в окрестности этой точки. Тогда, если существует предел отношения $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, то будет верно равенство:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L\,.$$

Правило Лопиталя в случае $\{\frac{\infty}{\infty}\}$. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки $x = a$ кроме, может быть, самой точки и неограниченно возрастают в её окрестности: $f(x) \to \infty$ и $g(x) \to \infty$ при $x \to a$, причём $g'(x) \neq 0$ в окрестности точки a. Тогда, если существует предел отношения $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, то будет верно равенство:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L\,.$$

Заметим, что неопределённости вида $\{0 \cdot \infty\}$, $\{\infty - \infty\}$, $\{1^\infty\}$, $\{\infty^0\}$, $\{0^0\}$ сводятся к неопределённостям вида $\{\frac{0}{0}\}$ или $\{\frac{\infty}{\infty}\}$ с помощью тождественных преобразований:

1. Пусть известны пределы двух функций: $f(x) \to 0$, $g(x) \to \infty$ при $x \to a$. Тогда предел произведения этих функций может быть записан в виде:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \{0\cdot\infty\} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

2. Пусть известны пределы двух функций: $f(x)\to\infty$, $g(x)\to\infty$ при $x\to a$. Тогда предел разности этих функций может быть записан в виде:

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \{\infty-\infty\} =$$
$$= \lim_{x\to a}\left(\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}\right) = \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}} = \left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

3. Пусть известны пределы двух функций: $f(x)\to 1$, $g(x)\to\infty$, или $f(x)\to\infty$, $g(x)\to 0$, или $f(x)\to 0$, $g(x)\to 0$ при $x\to a$. Тогда для нахождения предела показательно-степенной функции от этих функций следует воспользоваться основным логарифмическим тождеством:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \{1^\infty\} = e^{\lim\limits_{x\to a}(g(x)\cdot\ln f(x))} = e^{\{\infty\cdot 0\}} \quad \text{или}$$
$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \{\infty^0\} = e^{\lim\limits_{x\to a}(g(x)\cdot\ln f(x))} = e^{\{0\cdot\infty\}} \quad \text{или}$$
$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \{0^0\} = e^{\lim\limits_{x\to a}(g(x)\cdot\ln f(x))} = e^{\{0\cdot\infty\}}.$$

Далее, неопределённость вида $\{0\cdot\infty\}$ раскрывается по схеме, показанной в пункте 1.

Пример 4.6. Используя правила Лопиталя вычислить заданный предел $\lim\limits_{x\to -4}\frac{x^2+3x-4}{x^2+2x-8}$.

► В данном пределе при $x\to -4$ числитель и знаменатель дроби неограниченно убывают, т.е. мы сталкиваемся с неопределённостью вида

$$\lim_{x\to -4}\frac{x^2+3x-4}{x^2+2x-8} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to -4}\frac{(x^2+3x-4)'}{(x^2+2x-8)'} =$$
$$= \lim_{x\to -4}\frac{2x+3}{2x+2} = \frac{2\cdot(-4)+3}{2\cdot(-4)+2} = \frac{-8+3}{-8+2} = \frac{5}{6}.\ ◄$$

Сравнивая два приёма раскрытия неопределённостей делаем вывод, что применение правила Лопиталя существенно снижает трудоёмкость процесса.

4.7. Исследование функций

Одним из важнейших приложений производной является её применение к исследованию функций и построению графиков.

Возрастание и убывание функции

Функция $y = f(x)$ называется *неубывающей* (или *невозрастающей*) на интервале $(a; b)$, если для любых $x_1 < x_2 \in (a; b)$ верно неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (или $f(x_1) \geqslant f(x_2)$). Интервалы из области определения функции $y = f(x)$, на которых функция неубывает (или невозрастает) называются *интервалами монотонности* этой функции.

Необходимое условие монотонности. Если дифференцируемая на некотором интервале $(a; b)$ функция $f(x)$ не убывает (не возрастает), то её производная для любого $x \in (a; b)$ будет неотрицательна $f'(x) \geqslant 0$ (неположительна $f'(x) \leqslant 0$).

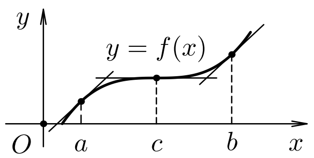


Рис. 4.4. График функции, неубывающей на $(a; b)$

Геометрически это означает, что касательные к графику неубывающей дифференцируемой функции образуют острые углы с положительным направлением оси Ox или параллельны ей (см. рис. 4.4). Тогда касательные к графику невозрастающей дифференцируемой функции образуют тупые углы с положительным направлением оси Ox или параллельны ей.

Достаточное условие монотонности. Если функция $f(x)$ дифференцируема на некотором интервале $(a; b)$ и для любого $x \in (a; b)$ её производная будет неотрицательна $f'(x) \geqslant 0$ (неположительна $f'(x) \leqslant 0$), то функция $f(x)$ не убывает (не возрастает) на этом интервале.

Максимум и минимум функции

Наличие у одной и той же функции интервалов возрастания и убывания порождает особые точки, отделяющие эти интервалы друг от друга и называемые *точками экстремума.*

Точка $x = a$ называется *точкой максимума* (или *точкой минимума*) функции $y = f(x)$, если существует такая δ-окрестность этой точки, что для всех $x \neq a$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(a)$ (или $f(x) > f(a)$).

Заметим, что понятие экстремума всегда связано с двусторонней окрестностью точки $x = a$ из области определения функции $y = f(x)$. Поэтому функция $y = f(x)$ может иметь экстремум лишь во внутренних точках области определения. Более того, непрерывная функция может иметь экстремум лишь в *критических точках первого рода*, в которых её производная равна нулю или не существует.

Необходимое условие экстремума. Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = a$, то её производная в этой точке будет равна нулю: $f'(a) = 0$. Геометрически это означает, что в точках экстремума касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси Ox (см. точки $x = c_1$ и $x = c_2$ на рис. 4.3 а)).

Первое достаточное условие экстремума. Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в достаточно малой окрестности критической точки $x = a$ и при переходе через нее производная меняет знак с минуса на плюс (или с плюса на минус), то точка $x = a$ является точкой минимума (или максимума) функции $y = f(x)$.

Второе достаточное условие экстремума. Если в точке $x = a$ первая производная функции $y = f(x)$ равна нулю ($f'(a) = 0$), а вторая производная в этой точке существует и отлична от нуля ($f''(a) \neq 0$), то при $f''(a) > 0$ (или $f''(a) < 0$) точка $x = a$ является точкой минимума (или максимума) функции $y = f(x)$.

Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке

Согласно теореме Вейерштраса (п.3.6) непрерывная функция $y = f(x)$ достигает на отрезке $[a; b]$ своего наибольшего и наименьшего значений. Этих значений функция может достигать: а) на границах отрезка, т.е. при $x = a$ или при $x = b$; б) во внутренних критических точках, т.е. при $f'(c) = 0$, где $c \in (a; b)$.

Заметим, что если функция $y = f(x)$ имеет на отрезке $[a; b]$ лишь одну критическую точку, которая является точкой максимума (или минимума), то своего наибольшего (или наименьшего) значения на этом отрезке функция достигает именно в этой точке.

Если же функция $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ вообще не имеет критических точек, то функция монотонна на этом отрезке и, следовательно, достигает своего наибольшего и наименьшего значений на концах отрезка.

Выпуклость графика функции. Точки перегиба

Точки разрыва и экстремума функции в основном определяют поведение графика. Введем понятие других значимых для качества графика точек.

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым на интервале* $(a; b)$, если он располагается ниже любой из своих касательных на этом интервале. В противном случае график функции $y = f(x)$ называется *вогнутым (выпуклым вниз) на интервале* $(a; b)$.

Достаточное условие выпуклости вверх (вниз) графика функции. Если $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$ на некотором промежутке X, то график функции является выпуклым вверх (вниз) на этом промежутке.

Точка x_0, в которой вторая производная дважды дифференцируемой функции равна нулю или не существует называется *критической точкой второго рода.*

Точкой перегиба графика функции называется точка при переходе через которую график функции меняет направление выпуклости.

Достаточное условие перегиба. Если $f''(x)$ при переходе через критическую точку второго рода x_0 меняет знак, то x_0 есть точка перегиба графика функции $f(x)$.

Заметим, что если критическая точка первого рода не является точкой экстремума, то она есть точка перегиба.

Схема исследования функции и построения её графика

1. Найти область определения функции;
2. Исследовать функцию на непрерывность и найти асимптоты графика функции;
3. Найти критические точки первого рода, интервалы возрастания, убывания функции и точки её экстремума;
4. Найти критические точки второго рода, интервалы выпуклости, вогнутости графика функции и точки перегиба;
5. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и при необходимости составить таблицу дополнительных точек;
6. Построить график функции $y = f(x)$ в системе координат xOy на основании полученных данных.

Пример 4.7. Используя методы дифференциального исчисления, провести исследование заданной функции $y = \frac{1}{4}\left(x^3 + 9x^2 + 15x - 9\right)$ и на основании полученных данных построить её график

► **1.** Областью определения данной функции являются все действительные значения аргумента x:

$$D(y) = \{x :\ x \in (-\infty, +\infty)\},$$

следовательно, функция непрерывна на всей числовой прямой и её график не имеет вертикальных асимптот.

2. Выясним наличие у графика заданной функции наклонных асимптот. Для определения коэффициентов уравнения асимптоты $y = kx+b$ воспользуемся формулами:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx).$$

В нашем случае имеем:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3 + 9x^2 + 15x - 9}{x} = \\ = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4} \left(x^2 + 9x + 15 - \frac{9}{x}\right) = \infty.$$

Следовательно, график функции не имеет наклонных асимптот.

3. Исследуем функцию на экстремумы и определим интервалы монотонности. С этой целью найдём и приравняем к нулю её производную:

$$y' = \frac{3}{4}\left(x^2 + 6x + 5\right); \quad y' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + 6x + 5 = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение, находим координаты двух критических точек первого рода:

$$x_{11} = -5; \qquad y_{11} = \frac{1}{4}\left((-5)^3 + 9\cdot(-5)^2 + 15\cdot(-5) - 9\right) = 4;$$

$$x_{12} = -1; \qquad y_{12} = \frac{1}{4}\left((-1)^3 + 9\cdot(-1)^2 + 15\cdot(-1) - 9\right) = -4.$$

Разбиваем область определения функции этими точками на части и по знаку её первой производной выявляем интервалы монотонности и наличие экстремумов.

x	$(-\infty, -5)$	-5	$(-5, -1)$	-1	$(-1, \infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

4. Определим точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости. Для этого найдём вторую производную заданной функции и приравняем её к нулю:

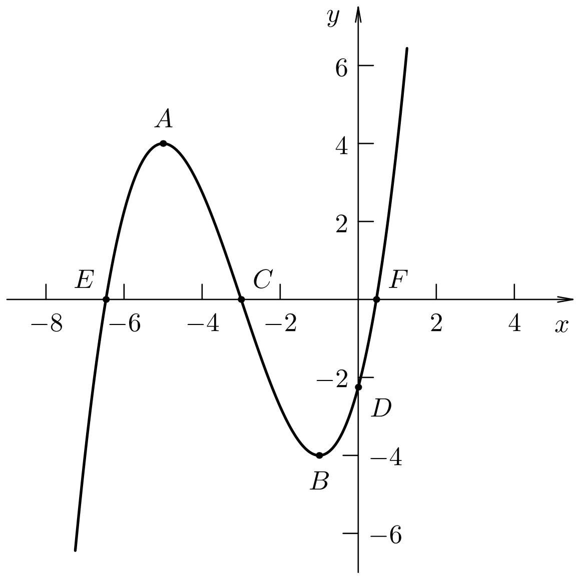


Рис. 4.5. График функции $y = \frac{1}{4}(x^3 + 9x^2 + 15x - 9)$.

$$y'' = \frac{3}{2}(x+3); \qquad y'' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x + 3 = 0\,.$$

Решая полученное уравнение, находим координаты критической точки второго рода:

$$x_{21} = -3\,; \qquad y_{21} = \frac{1}{4}\left((-3)^3 + 9\cdot(-3)^2 + 15\cdot(-3) - 9\right) = 0\,.$$

Разбиваем область определения функции полученной точкой на части и по знаку её второй производной выявляем интервалы выпуклости и наличие точки перегиба.

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, \infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$	т.п.	$\smile$

5. Для построения графика функции в выбранной системе координат отметим точки: максимума $A(-5, 4)$, минимума $B(-1, -4)$, перегиба $C(-3, 0)$, а также точку $D(0, -\frac{9}{4})$ — пересечения графика функции с осью Oy. В качестве дополнительных точек можно использовать точки пересечения графика функции с осью Ox: $E(-3 - 2\sqrt{3}, 0)$ и $F(-3 + 2\sqrt{3}, 0)$.

6. С учётом результатов проведённых исследований построим график функции и все характерные точки в системе координат xOy (см. рис. 4.5). ◄

Пример 4.8. Используя методы дифференциального исчисления, провести исследование заданной функции $y = \frac{x^2+20}{x-4}$ и на основании полученных данных построить её график

► **1.** Областью определения данной функции являются все действительные значения аргумента x, за исключением точки в которой знаменатель дроби становится равен нулю. Это значит, что функция непрерывна на всей числовой прямой, кроме точки $x = 4$ в которой она претерпевает разрыв:

$$D(y) = \{x: \ x \in (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)\}.$$

2. Для классификации точки разрыва вычислим односторонние пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x\to 4-0} f(x) = \lim_{x\to 4-0} \frac{x^2+20}{x-4} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 4+0} f(x) = \lim_{x\to 4+0} \frac{x^2+20}{x-4} = \infty.$$

Таким образом, данная точка является точкой разрыва второго рода, а прямая $x = 4$ — вертикальной асимптотой графика.

Выясним наличие у графика заданной функции наклонных асимптот. Для определения коэффициентов уравнения асимптоты $y = kx+b$ воспользуемся формулами:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}; \qquad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx).$$

В нашем случае имеем:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+20}{x^2-4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1+\dfrac{20}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{4}{x}\right)} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+20}{x-4} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+20-x^2+4x}{x-4} = 4.$$

Из этого следует, что прямая $y = x+4$ является наклонной асимптотой графика исследуемой функции.

3. Исследуем функцию на экстремумы и определим интервалы монотонности. С этой целью найдём её критические точки первого рода для чего приравняем к нулю первую производную функции:

$$y' = \frac{2x(x-4)-(x^2+20)}{(x-4)^2} = \frac{x^2-8x-20}{(x-4)^2}\,; \quad y'=0 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x^2-8x-20=0\,.$$

Решая полученное квадратное уравнение, находим координаты двух критических точек первого рода:

$$x_{11} = -2\,; \qquad y_{11} = \frac{(-2)^2+20}{-2-4} = -4\,;$$
$$x_{12} = 10\,; \qquad y_{12} = \frac{10^2+20}{10-4} = 20\,.$$

Разбиваем область определения функции найденными точками на части и на основании знака её первой производной выявляем интервалы монотонности и наличие экстремумов.

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,4)$	4	$(4,10)$	10	$(10,\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	т.р.	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	т.р.	$\searrow$	min	$\nearrow$

4. Для определения точек перегиба и интервалов выпуклости и вогнутости графика необходимо отыскать критические точки второго рода для заданной функции. С этой целью найдём вторую производную функции и приравняем её числитель к нулю:

$$y'' = \frac{(2x-8)\,(x-4)^2-2(x-4)\,(x^2-8x-20)}{(x-4)^4} = \frac{72}{(x-4)^3}\,;$$
$$72 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad y'' \neq 0\,.$$

Отсюда следует, что исследуемая функция не имеет ни одной точки перегиба.

В таком случае, разобьём область определения функции точкой разрыва $x=4$ на две части, в каждой из которых установим знак второй производной.

x	$(-\infty,4)$	4	$(4,\infty)$
$f''(x)$	$-$	т.р.	$+$
$f(x)$	$\frown$	т.р.	$\smile$

5. Для построения графика в выбранной системе координат изобразим: точку максимума $A(-2,-4)$, минимума $B(10,20)$, точку пересечения вертикальной асимптоты с наклонной — точку $C(4,8)$ и точку пересечения графика функции с осью Oy — точку $D(0,-5)$.

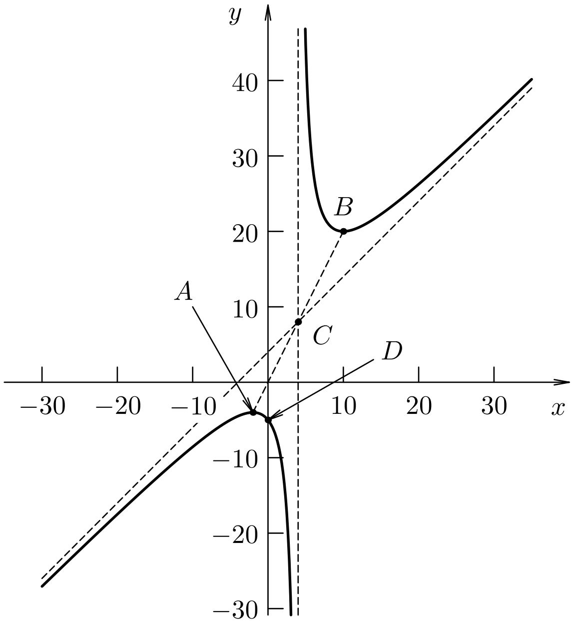


Рис. 4.6. График функции $y = \frac{x^2+20}{x-4}$.

6. С учётом результатов проведённых исследований построим график функции, его асимптоты и все характерные точки в системе координат xOy (см. рис. 4.6). ◄

4.8. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение производной. Каков геометрический смысл производной?
2. Что называется касательной к плоской кривой? Запишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$.
3. Каковы правила вычисления производных от суммы, произведения и частного двух функций?
4. Чему равна производная константы и производная независимой переменной?
5. Напишите формулу для вычисления производной сложной функции.

6. Что называется дифференциалом функции и в чём отличие дифференциала функции от её приращения?
7. Как вычисляются производные и дифференциалы высших порядков?
8. Как формулируется теорема Лагранжа?
9. Каковы признаки возрастания и убывания функции?
10. Докажите, что функция $y = \cos(x) - x$ убывает на любом промежутке.
11. Сформулируйте правила нахождения экстремумов функции.
12. Приведите пример, показывающий, что обращение в нуль производной не является достаточным условием экстремума функции.
13. Как найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба кривой?
14. Покажите, что график функции $y = \frac{x^3}{4} + 3x^2 + ax + b$ не имеет точек перегиба при любых значениях параметров a и b.

Глава 5

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

5.1. Понятие о функции многих переменных

Переменные $x, y, z, \ldots, t$ называются *независимыми между собой*, если каждая из них может принимать любые значения в своей области изменения, независимо от того, какие значения принимают при этом остальные переменные.

Переменная величина u называется *функцией независимых переменных* $x, y, z, \ldots, t$, если каждой совокупности значений этих переменных из области их изменения соответствует единственное определённое значение u:

$$u = f(x, y, z, \ldots, t)\,.$$

Областью определения функции $f(x, y, z, \ldots, t)$ называется *совокупность значений независимых переменных* $x, y, z, \ldots, t$, при которых функция определена, то есть принимает действительные значения.

Пример 5.1. Найти область определения функции:

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

► Область определения данной функции задаётся неравенством $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ или $x^2 + y^2 \leq 4$, то есть представляет собой круг радиуса $R = 2$ с центром в начале координат. ◄

В дальнейшем для упрощения записей все определения и формулы приводятся только для функции двух независимых переменных. *Геометрическим изображением* или *графиком* функции двух переменных $z = f(x,y)$ является *поверхность в пространстве* $Oxyz$. *Линией уровня* функции $z = f(x,y)$ называется *множество всех точек плоскости* Oxy, для которых функция имеет *одно и то же значение*. Линии уровня задаются уравнением:

$$f(x,y) = C\,,$$

где $C = \text{const}$ — некоторая постоянная.

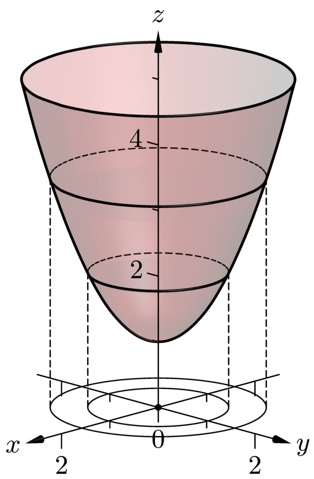


Рис. 5.1. Параболоид вращения и его линии уровня

Примерами линий уровня являются изотермы — линии уровня функции температуры и изобары — линии уровня функции атмосферного давления. Другими примерами линий уровня являются контуры местности на топографических картах, которые образуются из точек с одинаковой высотой местности над уровнем моря. Для функции $z = x^2 + y^2$ семейство линий уровня будет задаваться уравнением $x^2 + y^2 = C$, где константа $C > 0$. Полученному уравнению соответствует семейство концентрических окружностей с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{C}$. Построив эти линии, легко увидеть, что функция z растёт в радиальном направлении. Поэтому, геометрическим образом данной функции в пространстве будет «яма» с вогнутыми, быстро растущими краями. Точное название этой поверхности — *параболоид вращения* (см. рис. 5.1).

5.2. Непрерывность и частные производные

Частным приращением функции $\Delta_x f(x,y)$ или $\Delta_y f(x,y)$ называют такое *приращение функции*, которое обусловлено изменением значения *только одной* из независимых переменных: x или y. Таким образом, имеем:

$$\Delta_x f(x,y) = f(x + \Delta x, y) - f(x,y)\,,$$
$$\Delta_y f(x,y) = f(x, y + \Delta y) - f(x,y)\,.$$

Функция $z = f(x,y)$ называется *непрерывной в точке* (x_0,y_0), если она определена как в самой точке, так и в некоторой её окрестности, причём бесконечно малым приращениям её аргументов соответствует бесконечно малое приращение функции.

Функция $f(x,y)$ называется *непрерывной в данной области*, если она непрерывна в каждой точке рассматриваемой области. Здесь и далее будем предполагать, что для каждой рассматриваемой точки (x,y) функция $z = f(x,y)$ определена в некоторой окрестности этой точки.

Частной производной первого порядка функции двух независимых переменных $z = f(x,y)$ по одной из переменных называют предел отношения частного приращения функции к приращению соответствующей переменной при условии, что последнее стремится к нулю.

Частные производные функции $z = f(x,y)$ по переменным x и y имеют следующие обозначения:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x,y)\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x,y)\,.$$

Следовательно, имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta_x \to 0} \frac{\Delta_x f(x,y)}{\Delta x}\,, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta_y \to 0} \frac{\Delta_y f(x,y)}{\Delta y}\,.$$

Заметим, что при определении частной производной по одной из переменных надо все остальные независимые переменные считать константами: $\frac{\partial f}{\partial x} = f'_{x,y=\mathrm{const}}$ или $\frac{\partial f}{\partial y} = f'_{y,x=\mathrm{const}}$. Следовательно, частное дифференцирование не требует никаких новых правил дифференцирования и при выполнении этой операции можно пользоваться уже известными формулами.

Пример 5.2. Найти частные производные функции двух независимых переменных $z = x^4 + y^3 \sin x$.

► При определении $\frac{\partial z}{\partial y}$ независимая переменная x рассматривается как постоянная величина. Применяя правило дифференцирования суммы, видим, что функция $\sin x$ в этом случае рассматривается как постоянный множитель, а производная по y от x^4 равна нулю как производная константы:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left| \begin{array}{c} x = \mathrm{const}\,; \\ x^4 = \mathrm{const}\,; \\ \sin x = \mathrm{const} \end{array} \right| = 3y^2 \sin x\,.$$

При определении $\frac{\partial z}{\partial x}$ независимая переменная y рассматривается как постоянная величина. Применяя правило дифференцирования суммы, видим, что функция y^3 в этом случае рассматривается как постоянный множитель:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left| \begin{array}{c} y = \mathrm{const}\,; \\ y^3 = \mathrm{const} \end{array} \right| = 4x^3 + y^3 \cos x\,. \quad ◄$$

Пример 5.3. Найти частные производные функции двух независимых переменных $z = e^{x/y}$.

► В этом случае вначале применим правило дифференцирования сложной экспоненциальной функции:

$$z' = \left(e^{x/y}\right)' = e^{x/y} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)' .$$

Ещё раз заметим, что при определении частной производной по любой из независимых переменных вторая переменная считается константой:

$$\left(\frac{x}{y}\right)'_y = x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)'_y = -\frac{x}{y^2}\,; \qquad \left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{y} \cdot x'_x = \frac{1}{y}\,.$$

Окончательно имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \cdot e^{x/y}; \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} \cdot e^{x/y}. \qquad ◄$$

5.3. Полное приращение и дифференциал

Полным приращением $\Delta f(x,y)$ называют такое приращение функции $z = f(x,y)$, которое обусловлено изменением значений всех независимых переменных. Таким образом, имеем

$$\Delta f(x,y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y)\,,$$

где Δx и Δy — приращения соответствующих независимых переменных.

Под *дифференциалом независимой переменной* понимается *приращение* этой переменной: $\mathrm{d}x = \Delta x$, $\mathrm{d}y = \Delta y$.

Полным дифференциалом (или просто *дифференциалом*) *функции* двух независимых переменных $z = f(x,y)$ называется *главная часть её полного приращения*, линейная относительно Δx и Δy. Дифференциал функции можно представить в виде:

$$\mathrm{d}z = A(x,y) \cdot \Delta x + B(x,y) \cdot \Delta y\,,$$

где $A(x,y)$ и $B(x,y)$ не зависят от Δx и Δy и, сверх того

$$\Delta z - \mathrm{d}z = \alpha(x,y) \cdot \Delta x + \beta(x,y) \cdot \Delta y\,,$$

где $\alpha(x,y)$ и $\beta(x,y)$ — бесконечно малые при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. *Дифференцируемой в данной области* называется функция $z = f(x,y)$, имеющая в этой области дифференциал $\mathrm{d}z$.

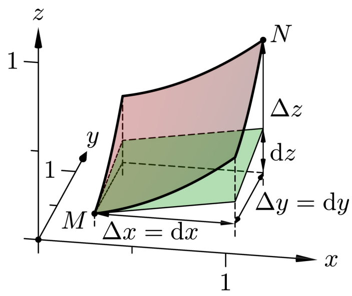


Рис. 5.2. Геометрический смысл дифференциала

Геометрически дифференциал $\mathrm{d}z$ функции двух переменных есть приращение аппликаты плоскости, касательной к поверхности $z = f(x,y)$ в данной точке, когда переменные x и y получают приращение Δx и Δy (см. рис. 5.2).

Достаточное условие дифференцируемости

Если функция $z = f(x,y)$ обладает непрерывными частными производными $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в данной области, то эта функция дифференцируема в этой области и её дифференциал выражается формулой

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\,.$$

В силу определения дифференциала при малых Δx и Δy приращение дифференцируемой функции можно приближённо заменить её дифференциалом. Отсюда имеем приближенное равенство

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \approx f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y$$

или

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + \mathrm{d}f(x,y)\,.$$

Пример 5.4. Задана функция двух переменных и две точки:

$$z = \sqrt[3]{x^2+y^3+3}\,, \quad A(4;2)\,, \quad B(4{,}03;1{,}96)\,.$$

Вычислить: 1) приближенное значение функции z в точке B с помощью дифференциала dz; 2) значение функции $z(B)$ непосредственно, без помощи дифференциала; 3) относительную погрешность (в процентах), возникающую при замене приращения функции Δz её дифференциалом dz в точке B.

► **1.** Найдём частные производные функции z:

$$z'_x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+y^3+3)^2}} = \frac{2x}{3z^2}\,;\ z'_y = \frac{3y^2}{3\sqrt[3]{(x^2+y^3+3)^2}} = \frac{y^2}{z^2}\,.$$

Подставляя координаты точки $A(4;2)$, получим:

$$z(A)=\sqrt[3]{27}=3\,;\;\; z'_x(A)=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3^2}=\frac{8}{27}\,;\;\; z'_y(A)=\frac{2^2}{3^2}=\frac{4}{9}\,.$$

При $\Delta x(A)=4{,}03-4=0{,}03$ и $\Delta y(A)=1{,}96-2=-0{,}04$ найдём дифференциал функции в точке A:

$$dz(A)=\frac{8}{27}\cdot 0{,}03+\frac{4}{9}\cdot(-0{,}04)=-\frac{0{,}08}{9}\approx -0{,}0089\,.$$

Далее по формуле $z(B)\approx z(A)+dz(A)$ находим приближенное значение функции z в точке B:

$$z(B)\approx 3-0{,}0089=2{,}9911\,.$$

2. Вычислим теперь значение функции z в точке B непосредственно:

$$z(B)=\sqrt[3]{4{,}03^2+1{,}96^3+3}=\sqrt[3]{26{,}770436}\approx 2{,}9914\,.$$

3. Заметим, что если H — точное, а h — приближенное значение некоторой величины, то *относительная погрешность* приближенного значения $\delta(h)$ *в процентах* определяется по формуле:

$$\delta(h)=\frac{H-h}{h}\cdot 100\,\%\,.$$

В данном случае относительная погрешность приближенного значения $z(B)$ равна:

$$\delta(z(B))=\frac{2{,}9914-2{,}9911}{2{,}9911}\cdot 100\,\%=\frac{0{,}0003}{2{,}9911}\cdot 100\,\%\approx 0{,}01\%\,. \qquad \blacktriangleleft$$

5.4. Производная по направлению и градиент

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в области D, содержащей точку $M(x,y)$. Зададим некоторое направление l косинусами углов $\cos\alpha$ и $\cos\beta$, образованных лучом l с осями Ox и Oy. При перемещении в направлении l точки $M(x,y)$ в точку $M_1(x+\Delta x,y+\Delta y)\in D$ функция получит приращение

$$\Delta_l z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)\,.$$

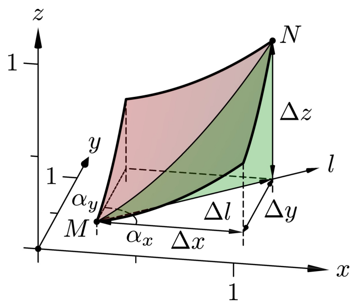


Рис. 5.3. Приращение функции Δz в направлении l

Обозначим через $\Delta l = MM_1$ — величину перемещения точки M (см. рис. 5.3). Тогда, под *производной* $\frac{\partial z}{\partial l}$ *функции* $z = f(x,y)$ *в заданном направлении* l понимается предел отношения приращения функции в этом направлении к величине перемещения, когда последнее стремится к нулю:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta l}.$$

Величина производной $\frac{\partial z}{\partial l}$ соответствует *скорости изменения функции* z *в направлении* l. Формула для вычисления производной функции z в заданном направлении l имеет вид

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta.$$

Очевидно, что частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ представляют производные по направлениям, параллельным осям Ox и Oy соответственно.

Градиентом функции $z = f(x,y)$ называется *вектор* с координатами $\overline{\mathrm{grad}}\, z = (z'_x, z'_y)$. Рассмотрим скалярное произведение векторов $\overline{\mathrm{grad}}\, z = (z'_x, z'_y)$ и единичного вектора $\bar{e} = (\cos\alpha, \cos\beta)$:

$$\overline{\mathrm{grad}}\, z \cdot \bar{e} = z'_x \cos\alpha + z'_y \cos\beta.$$

Сравнивая последнюю формулу с формулой производной по направлению, делаем вывод, что производная по направлению есть скалярное произведение вектора градиента $\overline{\mathrm{grad}}\, z$ и единичного вектора, задающего направление l:

$$z'_l = \overline{\mathrm{grad}}\, z \cdot \bar{e}.$$

Известно, что скалярное произведение двух векторов максимально, если они сонаправлены. Следовательно, *градиент функции* в данной точке соответствует *направлению максимальной скорости изменения функции* в этой точке. Можно доказать, что градиент функции в данной точке перпендикулярен линии уровня, проходящей через эту точку.

Пример 5.5. Задана функция $z = f(x, y)$ и координаты двух точек на плоскости:

$$z = 3e^{x^{-2}+y^2} + 3x^2y + 9y\,; \quad A(-4,-1)\,; \quad B(2,1)\,.$$

Требуется определить направление максимальной скорости изменения функции в точке A и скорость изменения функции в направлении вектора $\overline{AB}$ в этой точке. Построить единичные векторы градиента функции и направления $\overline{AB}$ в точке A в системе координат xOy.

► **1.** Используя таблицу основных производных и правила дифференцирования сложной функции, найдём частные производные первого порядка z'_x и z'_y для указанной функции:

$$z'_x = 3e^{x^{-2}+y^2}\left(x^{-2}+y^2\right)'_x + 6xy = -\frac{6}{x^3}\,e^{1/x^2+y^2} + 6xy\,,$$
$$z'_y = 3e^{x^{-2}+y^2}\left(x^{-2}+y^2\right)'_y + 3x^2 + 9 = 6y\,e^{1/x^2+y^2} + 3x^2 + 9\,.$$

Вычислим значения частных производных в точке $A(-4,-1)$:

$$z'_x(A) = \frac{6}{64}\cdot e^{17/16} + 6\cdot(-4)\cdot(-1) \approx 24{,}3\,;$$
$$z'_y(A) = -6\cdot e^{17/16} + 48 + 9 \approx 39{,}6\,.$$

Направление максимальной скорости изменения функции двух переменных $z = f(x,y)$ задаётся вектором градиента $\overline{\mathrm{grad}}\,z = (z'_x, z'_y)$. Так как значения частных производных в точке A уже вычислены в предыдущем пункте, то можем записать искомый вектор:

$$\overline{\mathrm{grad}}\,z(A) = (z'_x(A), z'_y(A)) = (24{,}3;\,39{,}6)\,.$$

Для вычисления единичного вектора $\overline{e_1}$, сонаправленного с вектором $\overline{\mathrm{grad}}\,z(A)$, разделим координаты вектора градиента на его модуль в этой точке:

$$|\,\overline{\mathrm{grad}}\,z(A)| = \sqrt{24{,}3^2 + 39{,}6^2} \approx 46{,}5\,;$$
$$\overline{e_1} = \left(\frac{24{,}3}{46{,}5};\,\frac{39{,}6}{46{,}5}\right) \approx (0{,}52;\,0{,}85)\,.$$

2. Скорость изменения функции z в направлении вектора $\overline{AB}$ определяется её производной в указанном направлении z'_{AB}:

$$z'_l = z'_x\cos\alpha + z'_y\cos\beta\,,$$

где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ — направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$, равные:

$$\cos\alpha = \frac{x_B - x_A}{|\,\overline{AB}\,|} = \frac{2+4}{\sqrt{6^2+2^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}\,;$$
$$\cos\beta = \frac{y_B - y_A}{|\,\overline{AB}\,|} = \frac{1+1}{\sqrt{6^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}\,.$$

Таким образом,

$$z'_{AB} = \frac{3}{\sqrt{10}}\Big(-\frac{6}{x^3}\,e^{1/x^2+y^2} + 6xy\Big) + \frac{1}{\sqrt{10}}\Big(6y\,e^{1/x^2+y^2} + 3x^2 + 9\Big)\,.$$

Единичный вектор $\overline{e_2}$ в направлении $\overline{AB}$ имеет приближенное значение:

$$\overline{e_2} \approx (0{,}95;\,0{,}32)\,.$$

В результате, скорость изменения функции z в направлении $\overline{AB}$ в точке A составит:

$$z'_{AB}(A) = 0{,}95\cdot 24{,}3 + 0{,}32\cdot 39{,}6 \approx 35{,}8\,.$$

Вывод: Направление вектора $\overline{AB}$ и направление максимальной скорости изменения функции $z(x,y)$ в точке A не совпадают:

$$\overline{e_1} = (0{,}52;\,0{,}85) \neq (0{,}95;\,0{,}32) = \overline{e_2}\,.$$

Следовательно, скорость изменения функции $z = f(x,y)$ в точке A в направлении вектора $\overline{AB}$ не является максимальной. ◄

5.5. Экстремум функции двух переменных

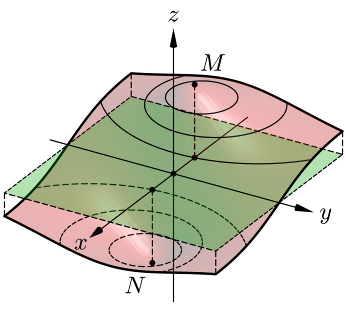


Рис. 5.4. Экстремум функции двух переменных

Функция двух переменных $z = f(x,y)$ может иметь, как и в случае одной переменной, точки экстремума.

Точка $M(x_0,y_0)$ называется *точкой максимума* (или *минимума*) функции $z = f(x,y)$ (см. рис. 5.4), если существует окрестность точки M, такая, что для всех точек (x,y) из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x_0,y_0) > f(x,y)$$
$$\big(\text{или } f(x_0,y_0) < f(x,y)\big).$$

Необходимое условие экстремума

Если точка $M(x_0, y_0)$ — есть точка экстремума дифференцируемой функции $z = f(x,y)$, то обе её частные производные в этой точке равны нулю:

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0\,, \\ f'_y(x_0, y_0) = 0\,. \end{cases}$$

Иначе говоря, в точке экстремума дифференцируемой функции её градиент равен нулю: $\overline{\text{grad}}\, f(x_0, y_0) = 0$.

Точки, в которых частные производные z'_x и z'_y равны нулю или не существуют, называются *критическими* или *стационарными точками функции* $z = f(x,y)$.

Заметим, что равенство частных производных нулю является *необходимым, но недостаточным* условием экстремума функции двух переменных.

Введём понятие частных производных второго порядка. Если частные производные сами являются дифференцируемыми функциями, то их частные производные называются *частными производными второго порядка.* Причём, производные

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy}$$

называются *«чистыми» производными второго порядка*, а производные

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx}$$

называются *«смешанными» производными второго порядка.*

Можно показать, что если частные производные второго порядка функции $z = f(x,y)$ непрерывны в некоторой точке (x_0, y_0), то её смешанные производные в этой точке совпадают друг с другом: $z''_{xy}(x_0, y_0) = z''_{yx}(x_0, y_0)$.

Достаточное условие экстремума

Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в некоторой окрестности критической точки (x_0, y_0), в которой $f'_x(x_0, y_0) = 0$ и $f'_y(x_0, y_0) = 0$ и имеет в этой точке непрерывные частные производные второго порядка. Обозначим значения частных производных второго порядка в критической точке:

$$z''_{xx}(x_0, y_0) = A\,; \quad z''_{yy}(x_0, y_0) = C\,; \quad z''_{xy}(x_0, y_0) = z''_{yx}(x_0, y_0) = B\,.$$

Тогда, наличие экстремума в критической точке можно определить по знаку выражения:

$$\Delta = AC - B^2 .$$

Если $\Delta > 0$, то функция $z = f(x,y)$ в критической точке (x_0, y_0) имеет экстремум: *максимум*, если $A < 0$ или *минимум*, если $A > 0$. Если $\Delta < 0$, то функция $z = f(x,y)$ в критической точке (x_0, y_0) *экстремума не имеет*; в случае $\Delta = 0$ вопрос о наличии экстремума требует *дополнительного исследования*.

При исследовании функции $z = f(x,y)$ на экстремум следует иметь ввиду, что он может находиться как среди критических точек в которых частные производные равны нулю, так и среди точек, в которых частные производные не существуют.

Пример 5.6. Найти экстремум функции двух независимых переменных $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$.

► Найдём частные производные первого порядка:

$$z'_x = 2x + y - 4 ; \qquad z'_y = 2y + x - 5 .$$

Используя необходимое условие экстремума, найдём координаты критических точек:

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 0 ; \\ 2y + x - 5 = 0 . \end{cases}$$

Решив систему, получим $x = 1, y = 2$, следовательно, $M(1,2)$ — единственная стационарная точка.

Найдём частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = 2 ; \qquad z''_{xy} = 1 ; \qquad z''_{yy} = 2 .$$

Значения производных не зависят от x и y, поэтому вычислять их величину в стационарной точке нет необходимости. Найдём значение выражения Δ:

$$A = z''_{xx}(M) = 2 ; \quad B = z''_{xy}(M) = 1 ; \quad C = z''_{yy}(M) = 2 ;$$
$$\Delta = A \cdot C - B^2 = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 .$$

Так как $\Delta > 0$ и $A > 0$, то функция z имеет минимум в точке $M(1,2)$:

$$z_{\min} = z(M) = 1^2 + 2^2 + 1 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 5 \cdot 2 = -7 . \quad ◄$$

Наибольшее и наименьшее значения

Для дальнейшего изложения рассмотрим некоторые понятия из теории множеств.

Точка плоскости $M(x,y)$ называется *внутренней точкой* для множества G, если она принадлежит этому множеству вместе с некоторой её окрестностью. Множество G называется *областью*, если все его точки — внутренние.

Точка $M(x,y)$ называется *граничной точкой* для множества G, если в любой её окрестности имеются точки, как принадлежащие этому множеству, так и не принадлежащие ему. *Границей* Γ для множества G называется совокупность всех его граничных точек.

Область G с присоединённой границей Γ называется *замкнутой* $\overline{G} = G \cup \Gamma$. Если область $\overline{G}$ целиком содержится внутри круга произвольного радиуса, то она называется *ограниченной*.

Теорема Вейерштрасса. Непрерывная в ограниченной замкнутой области $\overline{G}$ функция $z = f(x,y)$ достигает в этой области своего наибольшего и наименьшего значений. Причём эти значения достигаются функцией либо в критической точке, принадлежащей G, либо в её граничной точке.

Таким образом, при отыскании наибольшего и наименьшего значений функции $z = f(x,y)$ в некоторой ограниченной замкнутой области $\overline{G}$ вначале следует найти все внутренние точки области, в которых функция может иметь экстремум. Затем необходимо исследовать функцию $z = f(x,y)$ на границе области G и найти там точки, в которых функция может принимать наибольшие и наименьшие значения. При необходимости границу области разбивают на части, заданные различными уравнениями.

Вычислив значения функции во всех найденных точках, следует сравнить их между собой: наибольшее (или наименьшее) из этих значений и будет наибольшим (или наименьшим) значением функции во всей ограниченной замкнутой области $\overline{G}$.

Пример 5.7. Требуется найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ в замкнутой ограниченной области $\overline{G}$, заданной системой неравенств: $x \geqslant 0$; $\frac{x^2}{2} \leqslant y \leqslant 2$. Все полученные линии и характерные точки изобразить в системе координат xOy.

► **1.** Для решения поставленной задачи изобразим заданную область $\overline{G}$ в системе координат xOy.

Первому неравенству $x \geqslant 0$ соответствует полуплоскость, лежащая справа от оси Oy. Второе неравенство $\frac{x^2}{2} \leqslant y$ отсекает от этой полуплоскости часть, лежащую ниже параболы $y = \frac{x^2}{2}$, а третье неравенство $y \leqslant 2$ отсекает часть, лежащую выше горизонтальной линии $y = 2$. В результате получим область $\overline{G}$, изображённую на рис. 5.5.

Точки, соответствующие пересечению линий, которые ограничивают область $\overline{G}$, обозначим буквами $A(0,2)$, $B(2,2)$, $O(0,0)$.

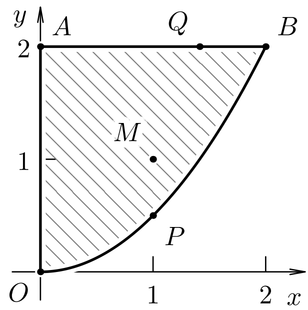


Рис. 5.5. Функции многих независимых переменных. Пример 5.7

2. Для исследования функции $z = f(x,y)$ на экстремум вначале найдём её частные производные первого порядка z'_x и z'_y и, используя необходимое условие экстремума, найдём координаты критических точек:

$$z'_x = 6x^2 - 6y\,; \qquad\qquad z'_y = -6x + 6y\,.$$

Решив систему уравнений:

$$\begin{cases} 6x^2 - 6y = 0\,; \\ -6x + 6y = 0\,, \end{cases}$$

найдём две точки $O(0,0)$ и $M(1,1)$, удовлетворяющие необходимому условию экстремума.

Первая из них принадлежит границе области (см. рис. 5.5). Следовательно, единственной внутренней точкой, в которой функция z может иметь экстремум, является точка $M(1;1)$.

Отыскав частные производные второго порядка z''_{xx}, z''_{xy} и z''_{yy}:

$$z''_{xx} = 12x\,; \qquad z''_{xy} = -6\,; \qquad z''_{yy} = 6\,,$$

найдём значение выражения Δ в точке M:

$$A = z''_{xx}(M) = 12\,; \qquad B = z''_{xy}(M) = -6\,; \qquad C = z''_{yy}(M) = 6\,;$$
$$\Delta = 12 \cdot 6 - (-6)^2 = 36\,.$$

Так как $\Delta > 0$ и $A > 0$, то функция z в точке M имеет минимум:

$$z_{\min} = z(M) = 2 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 = -1\,.$$

3. Точки, в которых функция $z = f(x, y)$ принимает наибольшее и наименьшее значения могут находиться как внутри области, так и на её границе.

Если функция принимает наибольшее (или наименьшее) значение во внутренней точке области, то она имеет в этой точке экстремум. Единственной точкой экстремума, лежащей внутри исследуемой области является точка M.

Исследуем функцию на границе, которая состоит из отрезков OA, AB и дуги параболы OB.

Линия OA. На отрезке OA выполняется равенство $x = 0$, поэтому на этом отрезке функция $z_{OA} = 3y^2$. При $0 \leqslant y \leqslant 2$ это возрастающая функция одной переменной y. Наибольшее и наименьшее значения она принимает на концах отрезка OA.

Линия AB. На отрезке AB выполняется равенство $y = 2$, следовательно, на этом отрезке функция

$$z_{AB} = 2x^3 - 6x \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 = 2x^3 - 12x + 12 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2$$

представляет собой функцию одной переменной x. Наибольшее и наименьшее значения этой функции находятся среди её значений в критических точках и на концах отрезка AB.

Исследуем полученную функцию на экстремум. Для этого найдём производную функции z'_{AB} и приравняем её к нулю:

$$z'_{AB} = \left(2x^3 - 12x + 12\right)' = 6x^2 - 12\,; \quad 6\left(x^2 - 2\right) = 0\,.$$

Решив уравнение $z'_{AB} = 0$, находим координаты критических точек $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$. Заданному условию $0 \leqslant x \leqslant 2$ удовлетворяет лишь одно значение $x_1 = \sqrt{2}$. На отрезке AB ему соответствует точка $Q(\sqrt{2}; 2)$.

Итак, наибольшее и наименьшее значения функции z на отрезке AB находятся среди её значений в точках A, B и Q (см. рис. 5.5).

Линия OB. На линии OB выполняется равенство $y = \frac{x^2}{2}$, в результате исследуемая функция имеет вид

$$z_{OB} = 2x^3 - 6x\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^4}{4} = \frac{3}{4}x^4 - x^3 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\,.$$

Исследуем полученную функцию на экстремум. Для этого найдём производную функции z'_{OB} и приравняем её к нулю:

$$z'_{OB} = \left(\frac{3}{4}x^4 - x^3\right)' = 3x^3 - 3x^2\,; \qquad 3x^2(x-1) = 0\,.$$

Решив уравнение $z'_{OB} = 0$, находим координаты критических точек $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Координаты обеих найденных точек удовлетворяют заданному неравенству $0 \leqslant x \leqslant 2$. На дуге OB этим значениям соответствуют точки $O(0,0)$ и $P(1,1/2)$.

Таким образом, наибольшее и наименьшее значения функции z на дуге OB находятся среди её значений в точках O, P и B.

На основании выше изложенного можно сделать вывод о том, что наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ в замкнутой ограниченной области $\overline{G}$, заданной системой неравенств $\frac{x^2}{2} \leqslant y \leqslant 2$ и $x \geqslant 0$, находятся среди её значений в точках O, A, B, M, P и Q.

Координаты указанных точек (x,y) и значения функции z в них приведены в таблице:

	O	A	B	M	P	Q
x	0	0	2	1	1	$\approx 1{,}41$
y	0	2	2	1	0,5	2
z	0	12	4	-1	$-0{,}25$	$\approx 0{,}69$

Наибольшее и наименьшее значения функции z в замкнутой ограниченной области $\overline{G}$ соответственно равны $z = 12$ (точка A) и $z = -1$ (точка M). Все полученные линии и характерные точки в системе координат xOy показаны на рис. 5.5. ◄

5.6. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение функции нескольких независимых переменных.
2. Что называется областью определения функции двух независимых переменных? Каково геометрическое изображение функции двух независимых переменных?
3. Приведите определение частного и полного приращений функции двух независимых переменных.
4. Какие функции называются непрерывными в точке и в области?
5. Приведите определение частных производных первого порядка функции двух независимых переменных. Каков их геометрический смысл?

6. Что называется полным дифференциалом функции двух независимых переменных?
7. Как найти частные производные второго порядка функции двух независимых переменных?
8. Что называется максимумом (минимумом) функции двух независимых переменных?
9. Сформулируйте необходимое и достаточное условия экстремума функции двух независимых переменных.
10. Сформулируйте определение производной по направлению и градиента функции двух независимых переменных.

Глава 6

Интегральное исчисление функций одной переменной

6.1. Первообразная и интеграл

Из главы 4 нам уже известно, что дифференцирование — это операция нахождения по заданной функции её производной. Для операции дифференцирования существует обратная операция, называемая *интегрированием*: отыскание функции по её производной.

Функция $F(x)$ называется *первообразной для* $f(x)$ на множестве X, если $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in X$.

Необходимо заметить, что любая непрерывная на X функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$ на множестве X и разность между любыми двумя первообразными для $f(x)$ равна постоянной величине.

Неопределённым интегралом от функции $f(x)$ на промежутке X называется совокупность всех первообразных этой функции:

$$\int f(x)dx = F(x) + C\,,$$

где $\int$ — знак интеграла; $f(x)$ — подынтегральная функция; $f(x)dx$ — подынтегральное выражение; $F(x)$ — первообразная для $f(x)$; C — произвольная постоянная.

Свойства неопределённого интеграла

1. Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)\,.$$

2. Дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx\,.$$

3. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int dF(x) = F(x) + C\,.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int C f(x)\, dx = C \int f(x)\, dx\,.$$

5. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме неопределённых интегралов от каждого слагаемого:

$$\int \big(f_1(x) + f_2(x)\big)\, dx = \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx\,.$$

Используя определение неопределённого интеграла и таблицу производных (см. приложение Б.10), можно записать таблицу неопределённых интегралов для некоторых элементарных функций (см. приложение Б.12).

6.2. Основные методы интегрирования

Непосредственное интегрирование

Метод основан на тождественных преобразованиях подынтегральной функции с приведением её к сумме двух или нескольких более простых функций. Этот метод применяется, если интегралы от слагаемых являются табличными или известен метод их нахождения.

Пример 6.1. Найти неопределённый интеграл методом непосредственного интегрирования

$$\int \left(7 - \frac{5}{x^2} + 3\sqrt[4]{x} - \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}\right) dx\,.$$

► Используя свойства неопределённого интеграла, представим исходный интеграл в виде суммы интегралов:

$$\int \left(7 - \frac{5}{x^2} + 3\sqrt[4]{x} - \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}}\right) dx =$$
$$= 7\int dx - 5\int \frac{1}{x^2} dx + 3\int \sqrt[4]{x} dx - \int \frac{1}{\sqrt[6]{x^5}} dx\,.$$

После преобразования подынтегральных функций к табличному виду получим сумму интегралов от степенных функций:

$$7\int dx - 5\int x^{-2}dx + 3\int x^{\frac{1}{4}}dx - \int x^{-\frac{5}{6}}dx =$$
$$= 7x - \frac{5}{-1}x^{-1} + 3\cdot\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} - 6x^{\frac{1}{6}} + C =$$
$$= 7x + \frac{5}{x} + \frac{12}{5}\sqrt[4]{x^5} - 6\sqrt[6]{x} + C\,. \blacktriangleleft$$

Метод замены переменной

Суть *метода замены переменной* или *подстановки* состоит в том, чтобы некоторую часть подынтегральной функции обозначить новой переменной и, используя эту новую переменную, выразить через нее все остальные части подынтегрального выражения. Данный метод позволяет существенно упростить исходный интеграл и свести его к табличному интегралу. В общем виде этот метод можно описать формулой:

$$\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = \left|\begin{array}{c} t=\varphi(x)\,; \\ dt=\varphi'(x)\,dx \end{array}\right| = \int f(t)\,dt\,,$$

где функция $x=\varphi(t)$ имеет непрерывную производную.

В частности, если интеграл отличается от «табличного» только аргументом подынтегральной функции, который имеет вид $ax+b$, то за новую переменную t следует принять этот аргумент: $t=ax+b$. Тогда будет справедлива следующая формула:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C \quad \Rightarrow \quad \int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\,F(ax+b)+C\,.$$

Отметим, что метод замены переменной является одним из основных методов вычисления неопределённых интегралов. Даже в тех случаях, когда мы интегрируем каким-либо другим методом, нам часто приходится в промежуточных вычислениях прибегать к замене переменной.

Пример 6.2. Найти неопределённый интеграл методом замены переменной

$$\int x^2 e^{3-2x^3}\,dx\,.$$

► Заметим, что множитель x^2 с точностью до постоянного коэффициента представляет собой производную аргумента показательной функции. Поэтому, используя замену переменной вида $t=3-2x^3$, вычислим её дифференциал $dt=(3-2x^3)'dx$ и выполним их подстановку в подынтегральное выражение:

$$\int x^2 e^{3-2x^3} dx = \left| \begin{array}{c} t = 3 - 2x^3; \\ dt = -6x^2 dx\,; \\ x^2 dx = -\frac{1}{6}\, dt \end{array} \right| = \int e^t \left(-\frac{1}{6}\right) dt = -\frac{1}{6} \int e^t dt\,.$$

В результате замены переменной получаем табличный интеграл (см. приложение Б.12). После нахождения первообразной произведём обратную замену переменной $t = 3 - 2x^3$:

$$-\frac{1}{6} \int e^t dt = -\frac{1}{6}\, e^t + C = -\frac{1}{6}\, e^{3-2x^3} + C\,. \blacktriangleleft$$

Метод интегрирования по частям

Пусть функции $f = f(x)$ и $g = g(x)$ имеют непрерывные производные, тогда выражение

$$\int f\, dg = fg - \int g\, df$$

описывает формулу *интегрирования по частям.*

Эта формула применяется, если интеграл $\int g\, df$ проще для интегрирования, чем $\int f\, dg$. Чаще всего интегрирование по частям применяют к произведениям многочленов n-ой степени $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ на тригонометрические, показательные или логарифмические функции:

1. Многочлен $P_n(x)$ относят к подынтегральной функции $f = P_n(x)$, если
$$\int P_n(x) \cdot \left\{ \begin{array}{c} e^{kx} \\ \sin kx \\ \cos kx \end{array} \right\} dx\,.$$
2. Многочлен $P_n(x)$ относят к дифференциалу переменной интегрирования $dg = P_n(x) dx$, если
$$\int P_n(x) \cdot \left\{ \begin{array}{c} \log_a x \\ \arcsin x \\ \operatorname{arctg} x \end{array} \right\} dx\,.$$

Пример 6.3. Найти неопределённый интеграл методом интегрирования по частям

$$\int \operatorname{arctg}(-2x)\, dx\,.$$

► Прежде чем приступать к интегрированию заметим, что подынтегральная функция является нечётной, следовательно, заданный интеграл можно записать в виде

$$\int \operatorname{arctg}(-2x)\,dx = -\int \operatorname{arctg} 2x\,dx\,.$$

Далее в соответствии с формулой интегрирования по частям положим: $f = \operatorname{arctg} 2x$; $dg = dx$. Дифференцируя функцию f и интегрируя дифференциал функции dg получим:

$$-\int \operatorname{arctg} 2x\,dx = \left| \begin{array}{c} f = \operatorname{arctg} 2x\,; \quad df = \dfrac{2\,dx}{1+4x^2}\,; \\ dg = dx\,; \quad g = \displaystyle\int dx = x \end{array} \right| =$$
$$= -\left(x \cdot \operatorname{arctg} 2x - \int \frac{2x\,dx}{1+4x^2} \right).$$

Заметим, что в последнем интеграле числитель дроби $2x$ с точностью до постоянного множителя является производной знаменателя $1+4x^2$. Выполним замену переменной. Пусть $t = 1+4x^2$, тогда $dt = 8x\,dx$ и искомый интеграл может быть записан в виде:

$$\int \frac{2x\,dx}{1+4x^2} = \left| \begin{array}{c} t = 1+4x^2\,; \\ dt = 8x\,dx\,; \\ 2x\,dx = \frac{1}{4}\,dt \end{array} \right| = \int \frac{1}{4}\,\frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t}\,.$$

В результате получаем табличный интеграл (см. приложение Б.12), который после обратной замены примет вид:

$$\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\ln|\,t\,| + C = \frac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right) + C\,.$$

Таким образом,

$$\int \operatorname{arctg}(-2x)\,dx = -x \cdot \operatorname{arctg} 2x + \frac{1}{4}\ln\left(1+4x^2\right) + C\,. \quad \blacktriangleleft$$

6.3. Интегрирование некоторых классов функций

Используя таблицу неопределённых интегралов и основные методы интегрирования, можно отыскать первообразные для многих элементарных функций. Однако, некоторые из этих функций обладают свойствами, позволяющими существенно упростить процедуру их интегрирования.

Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

При нахождении интегралов вида

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}\,dx \qquad \text{и} \qquad \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

применяется *метод выделения полного квадрата*, который даёт возможность представить квадратный трёхчлен в виде:

$$ax^2+bx+c = a(x+\alpha)^2+\beta\,,$$

где $\alpha = \dfrac{b}{2a}$, $\beta = c - \dfrac{b^2}{4a}$. Последующая подстановка $t = x+\alpha$ приводит указанные интегралы к табличным интегралам (см. приложение Б.12).

Пример 6.4. Найти неопределённый интеграл методом выделения полного квадрата

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+2x+5}\,.$$

► Выделим из квадратного трёхчлена, стоящего в знаменателе, полный квадрат: $x^2+2x+5 = (x^2+2x+1)+4 = (x+1)^2+4$. Полагая $t = x+1$, будем иметь

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{x\,dx}{(x+1)^2+4} = \left| \begin{array}{c} t = x+1\,; \\ dt = dx\,; \\ x = t-1 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{t-1}{t^2+4}\,dt = \int \frac{t}{t^2+4}\,dt - \int \frac{1}{t^2+4}\,dt\,.$$

Заметим, что второй интеграл является табличным, а для вычисления первого интеграла воспользуемся заменой $z = t^2+4$:

$$\int \frac{t\,dt}{t^2+4} = \left| \begin{array}{l} z = t^2+4\,; \\ dz = 2t\,dt\,; \\ t\,dt = \frac{1}{2}\,dz \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{dz}{2z} = \frac{1}{2}\ln|z| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\,t^2+4\,\right| + C\,.$$

Теперь, возвращаясь к первоначальной переменной x, получим окончательный результат:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2}\ln\left|\,t^2+4\,\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\,(x+1)^2+4\,\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\,x^2+2x+5\,\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C\,. \quad \blacktriangleleft$$

Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью называется отношение двух многочленов:

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{B_0 + B_1x + B_2x^2 + \ldots + B_mx^m}{A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n}\,,$$

где B_j, A_i — заданные коэффициенты. Рациональная дробь называется правильной, если $m < n$ и неправильной, если $m \geqslant n$.

Интегрирование простейших рациональных дробей. Различают четыре типа простейших рациональных дробей:

1. Интегрирование *простейшей рациональной дроби I типа* выполняется по формуле:

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\ln|x-a| + C\,.$$

2. Интегрирование *простейшей рациональной дроби II типа* выполняется по формуле:

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\,\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C\,.$$

3. Интегрирование *простейшей рациональной дроби III типа*

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx$$

уже было описано в предыдущем разделе.

4. Интегрирование *простейшей рациональной дроби IV типа*

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}\,dx$$

описано в рекомендуемой литературе (см. соответствующие разделы в [1, 6]).

Заметим, что достаточно рассмотреть лишь интегрирование правильных рациональных дробей, так как любую неправильную дробь можно представить в виде суммы многочлена $L_{m-n}(x)$ и правильной рациональной дроби, используя для деления многочленов схему «уголком». Полученный в результате такой процедуры интеграл от многочлена $L_{m-n}(x)$ вычисляется методом разложения.

Вычисление неопределённого интеграла правильной рациональной дроби сводится к разложению подынтегральной функции на сумму простейших рациональных дробей и интегрированию каждой из них по отдельности.

Для этого знаменатель дроби должен быть представлен в виде произведения линейных и (или) квадратичных множителей, например: $Q_n(x) = (x-a)(x-b)^k(x^2+px+q)$, где a, b — корни многочлена, p, q — известные действительные числа, трёхчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, а $1+k+2=n$.

Тогда дробь

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

представляется в виде суммы простейших дробей:

$$R(x) = \frac{A}{x-a} + \\ + \frac{B_k}{(x-b)^k} + \frac{B_{k-1}}{(x-b)^{k-1}} + \ldots + \frac{B_1}{x-b} + \\ + \frac{Cx+D}{x^2+px+q},$$

где A, B_1, ..., B_k, C, D — неизвестные коэффициенты, которые находятся путём приведения суммы справа к общему знаменателю и последующего приравнивания полученного числителя к $P_m(x)$.

Пример 6.5. Найти неопределённый интеграл методом разложения рациональной дроби на простейшие

$$\int \frac{2x+3}{(2-x)(1+x^2)}\,dx\,.$$

► Для интегрирования правильной рациональной дроби выполним вначале её разложение на простейшие методом неопределённых коэффициентов. С учётом множителей, стоящих в знаменателе исходной дроби, её разложение будет содержать простейшие дроби I и III типов:

$$\frac{2x+3}{(2-x)(1+x^2)} = \frac{A}{2-x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}\,.$$

Для нахождения неопределённых коэффициентов выполним сложение простейших дробей и проведём группировку полученного числителя по степеням переменной x:

$$\frac{A}{2-x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{A(1+x^2)+(Bx+C)(2-x)}{(2-x)(1+x^2)} =$$
$$= \frac{A + Ax^2 + 2Bx + 2C - Bx^2 - Cx}{(2-x)(1+x^2)} =$$
$$= \frac{x^2(A-B) + x(2B-C) + (2C+A)}{(2-x)(1+x^2)}\,.$$

Из равенства заданной и полученной дробей с одинаковыми знаменателями следует равенство их числителей:

$$2x+3 = x^2(A-B) + x(2B-C) + (2C+A)\,.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, составим систему уравнений относительно неопределённых коэффициентов A, B и C:

$$\left\{\begin{array}{c|r} x^2 & A - B = 0\,; \\ x^1 & 2B - C = 2\,; \\ x^0 & A + 2C = 3\,. \end{array}\right.$$

Решив полученную систему, найдём значения неопределённых коэффициентов: $A = \frac{7}{5}$, $B = \frac{7}{5}$, $C = \frac{4}{5}$. Тогда искомое разложение примет вид

$$\frac{2x+3}{(2-x)(1+x^2)} = \frac{1}{5}\left(\frac{7}{2-x} + \frac{7x+4}{1+x^2}\right)\,.$$

Используя полученное разложение, исходный интеграл может быть записан в виде суммы интегралов от простейших рациональных дробей

$$\int \frac{2x+3}{(2-x)(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{5}\left(\int \frac{7}{2-x}\,dx + \int \frac{7x+4}{1+x^2}\,dx\right)\,.$$

Интегрирование простейшей рациональной дроби I типа легко выполняется после замены переменной $t = 2 - x$:

$$\int \frac{7}{2-x}\,dx = 7\int \frac{dx}{2-x} = \left| \begin{aligned} t &= 2-x\,; \\ dt &= -dx\,; \\ dx &= -dt \end{aligned} \right| =$$

$$= -7\int \frac{dt}{t} = -7\ln|\,t\,| + C = -7\ln|\,2-x\,| + C\,.$$

Для интегрирования простейшей рациональной дроби III типа запишем интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$\int \frac{7x+4}{1+x^2}\,dx = 7\int \frac{x\,dx}{1+x^2} + 4\int \frac{dx}{1+x^2}\,.$$

Второе слагаемое представляет собой табличный интеграл (см. приложение Б.12)

$$4\int \frac{dx}{1+x^2} = 4\,\mathrm{arctg}\,x + C\,,$$

а первое слагаемое легко приводится к табличному виду с помощью замены переменной $t = 1+x^2$:

$$7\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \left| \begin{aligned} t &= 1+x^2\,; \\ dt &= 2x\,dx\,; \\ x\,dx &= \frac{1}{2}dt \end{aligned} \right| = \frac{7}{2}\int \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{7}{2}\ln|\,t\,| + C = \frac{7}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C\,.$$

Объединяя полученные результаты, искомый интеграл можно записать в виде:

$$\int \frac{2x+3}{(2-x)(1+x^2)}\,dx =$$

$$= -\frac{7}{5}\ln|\,2-x\,| + \frac{4}{5}\,\mathrm{arctg}\,x + \frac{7}{10}\ln\left(1+x^2\right) + C\,. \blacktriangleleft$$

Интегрирование иррациональных функций

Обозначим через $R(U,V)$ функцию переменных U,V, которая построена с использованием только четырёх арифметических действий $(+, -\,, \times\,, /)$. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,dx$ сводятся к интегралу от рациональной функции $R(x,t)$ с помощью подстановки $t = \sqrt[n]{ax+b}$.

Пример 6.6. Найти неопределённый интеграл от иррациональной функции

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x+1}}.$$

► Рационализируем подынтегральную функцию с помощью подстановки $t = \sqrt[3]{x+1}$:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{x+1}} = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt[3]{x+1}; \\ x = t^3 - 1; \\ dx = 3t^2\,dt \end{array} \right| = \int \frac{t^3-1}{t} \cdot 3t^2\,dt = 3\int (t^4 - t)\,dt =$$

$$= 3\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^2}{2}\right) + C = \frac{3}{5}(x+1)^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} + C. \quad ◄$$

Интегрирование некоторых тригонометрических функций

1. Интегралы вида $\int R(\sin x; \cos x)\,dx$, где $R(\sin x; \cos x)$ — рациональная функция тригонометрических аргументов, сводятся к интегралу от рациональной функции $R(t)$ с помощью так называемой *универсальной тригонометрической подстановки*:

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \qquad x = 2\operatorname{arctg} t, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Выражая $\sin x$ и $\cos x$ через t, получим:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Заметим, что универсальная подстановка часто приводит к слишком сложным рациональным дробям. Поэтому полезно выделить несколько частных случаев, допускающих использование более простых тригонометрических подстановок:

а) если $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$ — функция, нечётная относительно $\sin x$, то в качестве подстановки следует использовать $t = \cos x$;

б) если $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$ — функция, нечётная относительно $\cos x$, то в качестве подстановки следует использовать $t = \sin x$;

в) если $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$ — функция, чётная относительно $\sin x$ и $\cos x$, то в качестве подстановки следует использовать $t = \operatorname{tg} x$.

2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x\ dx$, где m, n — целые неотрицательные числа, сводятся к интегралу от рациональной функции с помощью следующих тригонометрических подстановок:

а) если m — нечётное, то в качестве подстановки следует использовать $t = \cos x$;

б) если n — нечётное, то в качестве подстановки следует использовать $t = \sin x$;

в) если m, n — чётные, то следует использовать следующие тригонометрические формулы для понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

3. Интегралы вида $\int R(\operatorname{tg} x)\, dx$ приводятся к интегралу от рациональной функции с помощью замены:

$$t = \operatorname{tg} x, \qquad x = \operatorname{arctg} t, \qquad dx = \frac{dt}{1 + t^2}.$$

4. Интегралы от произведения тригонометрических функций различных аргументов приводятся к интегралу от алгебраической суммы соответствующих функций с применением следующих формул:

$$\int \sin mx \cdot \cos nx\ dx = \frac{1}{2} \int \Big(\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\Big)\, dx;$$

$$\int \cos mx \cdot \cos nx\ dx = \frac{1}{2} \int \Big(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\Big)\, dx;$$

$$\int \sin mx \cdot \sin nx\ dx = \frac{1}{2} \int \Big(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\Big)\, dx.$$

Пример 6.7. Найти неопределённый интеграл от тригонометрической функции

$$\int \frac{dx}{1 - \sin x}.$$

► Для вычисления этого интеграла воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$:

$$\int \frac{dx}{1 - \sin x} = \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}; \\ dx = \dfrac{2dt}{1 + t^2}; \\ \sin x = \dfrac{2t}{1 + t^2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(1-\dfrac{2t}{1+t^2}\right)} = 2\int \frac{dt}{(1-t)^2}\,.$$

Используя замену переменной $z = 1 - t$, проинтегрируем полученную функцию, а затем, возвращаясь к первоначальным переменным $z \to t \to x$, окончательно запишем:

$$2\int \frac{dt}{(1-t)^2} = \left| \begin{array}{c} z = 1 - t\,; \\ dz = -dt\,; \\ dt = -dz \end{array} \right| = -2\int \frac{dz}{z^2} =$$

$$= \frac{2}{z} + C = \frac{2}{1-t} + C = \frac{2}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C\,. \quad ◀$$

Пример 6.8. Найти неопределённый интеграл от тригонометрической функции

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}\,dx\,.$$

► Заметим, что подынтегральная функция $\frac{\sin^3 x}{1+\cos x}$ является нечётной:

$$f(-x) = \frac{\sin^3(-x)}{1+\cos(-x)} = \frac{-\sin^3 x}{1+\cos x} = -f(x)\,.$$

Поэтому воспользуемся заменой $t = \cos x$ и, учитывая, что $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, получим:

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx = \int \frac{\sin^2 x\cdot\sin x}{1+\cos x}\,dx = \left| \begin{array}{c} t = \cos x\,; \\ dt = -\sin x\,dx\,; \\ \sin x\,dx = -dt\,; \\ \sin^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right| =$$

$$= -\int \frac{1-t^2}{1+t}\,dt = -\int (1-t)\,dt = -t + \frac{t^2}{2} + C =$$

$$= \frac{\cos^2 x}{2} - \cos x + C\,. \quad ◀$$

Пример 6.9. Найти неопределённый интеграл от тригонометрической функции:

$$\int \sin^4 x \cos^5 x\,dx\,.$$

► Так как подынтегральная функция имеет вид $\sin^m x \cos^n x$ и показатель степени n — нечётный, то для её интегрирования выполним подстановку $t = \sin x$. С учётом того, что $\cos^4 x = (1-\sin^2 x)^2$ получим:

$$\int \sin^4 x \cos^5 x\,dx = \int \sin^4 x \cos^4 x \cos x\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = \sin x\,; \\ dt = \cos x\,dx\,; \\ \cos^4 x = (1-t^2)^2 \end{array} \right| = \int t^4(1-t^2)^2 dt =$$

$$= \int (t^4 - 2t^6 + t^8)\,dt = \frac{t^5}{5} - \frac{2t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C =$$

$$= \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9} + C\,. \quad \blacktriangleleft$$

Пример 6.10. Найти неопределённый интеграл от тригонометрической функции:

$$\int \operatorname{tg}^4 x\,dx\,.$$

► Так как подынтегральная функция имеет вид $R(\operatorname{tg} x)$, то для её интегрирования воспользуемся заменой $t = \operatorname{tg} x$:

$$\int \operatorname{tg}^4 x dx = \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x\,; \\ x = \operatorname{arctg} t\,; \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{t^4}{1+t^2}\,dt.$$

Полученная подынтегральная функция является неправильной рациональной дробью, следовательно, произведя деление многочленов, получим легко интегрируемую сумму многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\int \frac{t^4}{1+t^2}\,dt = \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right) dt =$$

$$= \int t^2 dt - \int dt + \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t + C =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C\,. \quad \blacktriangleleft$$

Пример 6.11. Найти неопределённый интеграл от тригонометрической функции:

$$\int \sin 2x \cos 5x\,dx\,.$$

► Для нахождения этого интеграла воспользуемся формулой, преобразующей произведение двух тригонометрических функций в их сумму, которая интегрируется с помощью простейшей замены переменных:

$$\int \sin 2x \cos 5x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 7x + \sin 3x)\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 7x}{7} - \frac{\cos 3x}{3}\right) + C =$$
$$= -\frac{1}{14}\cos 7x - \frac{1}{6}\cos 3x + C\,. \quad ◀$$

Завершая обзор методов интегрирования, заметим, что хотя для всякой непрерывной функции существует первообразная, но не для всякой элементарной функции эта первообразная сама является элементарной функцией. Например, первообразная для функции e^{-x^2} не может быть выражена в элементарных функциях. Неопределённые интегралы от подобных функций принято называть «*неберущимися*».

6.4. Понятие определенного интеграла

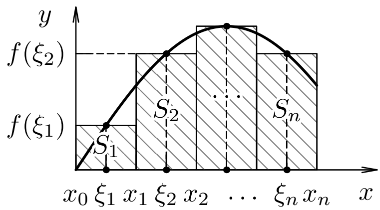


Рис. 6.1. Геометрический смысл интегральной суммы

Пусть на $[a,b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$. Разобьём отрезок $[a,b]$ точками $\{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$ на n элементарных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$. Тогда, обозначив длину элементарных отрезков как $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и выбрав на этих отрезках произвольные точки $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ можно составить для функции $f(x)$ выражение, называемое её *интегральной суммой* S на отрезке $[a,b]$:

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,.$$

Геометрический смысл интегральной суммы. Пусть $f(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$. Каждое слагаемое $f(\xi_i)\Delta x_i$ интегральной суммы равно площади S_i прямоугольника со сторонами $f(\xi_i)$ и Δx_i. Поэтому интегральная сумма равна сумме площадей всех прямоугольников $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$ (рис. 6.1).

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется *предел её интегральной суммы* S при длине наибольшего из отрезков стремящейся к нулю ($\max \Delta x_i \to 0$), если этот предел существует, конечен и не зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$

на элементарные отрезки и выбора точек ξ_i. Формально этот факт обозначается следующим образом:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,.$$

Числа a и b называют *нижним* и *верхним пределами интегрирования*. Из приведённого определения следует, что определённый интеграл зависит от вида подынтегральной функции $f(x)$ и значений пределов интегрирования a и b, но не зависит от выбора переменной интегрирования:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(t)\,dt\,.$$

Геометрический смысл определённого интеграла

Если $f(x) \geqslant 0$ на $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади под кривой $y = f(x)$ на $[a,b]$ (см. рис. 6.1). Действительно, при условии $\max \Delta x_i \to 0$ ломаная, образованная на каждом из отрезков $[x_{i-1},x_i]$ прямой $y = f(\xi_i)$, параллельной оси Ox, неограниченно приближается к кривой $y = f(x)$. Площадь под ломаной переходит в площадь под кривой.

Свойства определённого интеграла

1. Постоянный множитель $C = \mathrm{const}$ можно выносить за знак определённого интеграла:

$$\int\limits_a^b C\,f(x)\,dx = C\int\limits_a^b f(x)\,dx\,.$$

2. Определённый интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме определённых интегралов от каждого из слагаемых:

$$\int\limits_a^b \big(f_1(x) \pm f_2(x)\big)\,dx = \int\limits_a^b f_1(x)\,dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)\,dx\,.$$

3. При перемене мест верхнего и нижнего пределов знак определённого интеграла меняется на противоположный:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx\,.$$

4. При совпадении верхнего и нижнего пределов значение определённого интеграла равно нулю:

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0\,.$$

5. Если отрезок интегрирования разбит на части, то интеграл на всем отрезке равен сумме интегралов для каждой из возникших частей, т.е. при любых a, b, c :

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx\,.$$

6. Если для двух функций на отрезке $[a, b]$ верно неравенство $f(x) \leqslant \leqslant \varphi(x)$, то такое же неравенство будет верно и для определённых интегралов от этих функций:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx\,.$$

7. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке найдётся хотя бы одна точка $c \in [a, b]$, для которой будет справедливо равенство:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)\,.$$

6.5. Вычисление определённого интеграла

Вычисление определённых интегралов как предела интегральной суммы часто затруднительно и значительно упрощается, если использовать *формулу Ньютона–Лейбница*. Если $F(x)$ — первообразная для непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$, то определённый интеграл от этой функции $f(x)$ равен приращению любой её первообразной $F(x)$ на этом отрезке, т.е.:

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C \qquad \Rightarrow \qquad \int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

Как и в случае неопределённого интеграла использование замены переменной позволяет упростить интеграл, приблизив его к табличному. При этом нет необходимости возвращаться к исходной переменной интегрирования, а следует найти пределы интегрирования для новой переменной.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha;\beta]$, причём $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Тогда справедлива *формула замены переменной в определённом интеграле*:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt\,.$$

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a,b]$, то справедлива *формула интегрирования по частям в определённом интеграле*:

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\big(g(x)\big) = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b g(x)\,d\big(f(x)\big)\,.$$

Пример 6.12. Вычислить определённый интеграл с помощью формулы Ньютона–Лейбница

$$\int\limits_1^2 2^x\,dx\,.$$

► Произвольная первообразная для функции $f(x) = 2^x$ имеет вид: $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + C$. При вычислении по формуле Ньютона–Лейбница возьмём такую первообразную, у которой константа интегрирования равна нулю: $C = 0$. В результате получим:

$$\int\limits_1^2 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2}\Big|_1^2 = \frac{1}{\ln 2}\big(2^2 - 2\big) = \frac{2}{\ln 2}\,. \quad ◄$$

Пример 6.13. Вычислить определённый интеграл методом замены переменной

$$\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx\,.$$

► Заметим, что множитель $1/x$ представляет собой производную функции натурального логарифма. Поэтому используя замену переменной вида $t = \ln x$, вычислим её дифференциал $dt = (\ln x)'dx$ и выполним их подстановку в подынтегральное выражение:

$$\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx = \left|\begin{array}{ll} t = \ln x\,; & dt = \dfrac{1}{x}\,dx\,; \\ t(1) = 0\,; & t(e) = 1 \end{array}\right| = \int\limits_0^1 t^2\,dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}\,. \blacktriangleleft$$

Пример 6.14. Вычислить определённый интеграл методом интегрирования по частям

$$\int\limits_{1/2}^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{5-2x}}\,.$$

► В соответствии с формулой интегрирования по частям принимаем: $f = x$; $dg = \frac{dx}{\sqrt{5-2x}}$. Дифференцируя функцию f и интегрируя дифференциал функции dg получим:

$$\int\limits_{1/2}^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{5-2x}} = \left|\begin{array}{c} f = x\,;\ df = dx\,;\ dg = \dfrac{dx}{\sqrt{5-2x}}\,; \\ g = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x}} = -\sqrt{5-2x} \end{array}\right| =$$

$$= -x\sqrt{5-2x}\,\Big|_{1/2}^2 - \int\limits_{1/2}^2 -\sqrt{5-2x}\,dx = -1 + \int\limits_{1/2}^2 \sqrt{5-2x}\,dx\,.$$

При нахождении последнего интеграла воспользуемся методом замены переменной. Пусть $t = 5 - 2x$, тогда $dt = -2\,dx$ и искомый интеграл может быть приведён к табличному виду:

$$\int\limits_{1/2}^2 \sqrt{5-2x}\,dx = \left|\begin{array}{c} t = 5-2x\,; \\ dt = -2dx\,;\ dx = -\frac{1}{2}\,dt \\ t(\frac{1}{2}) = 4\,;\ t(2) = 1 \end{array}\right| =$$

$$= \int\limits_4^1 -\frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_1^4 \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{3}\sqrt{t^3}\,\Big|_1^4 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{4^3} - 1\right) = \frac{7}{3}\,.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{1/2}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{5-2x}} = -1 + \frac{7}{3} = \frac{4}{3} \approx 1{,}333. \quad \blacktriangleleft$$

6.6. Понятие о несобственных интегралах

Обобщим понятие определённого интеграла на случай, когда либо один из концов (или оба) отрезка интегрирования бесконечно удалён, либо функция не ограничена на отрезке интегрирования.

Несобственным интегралом I-го рода называется интеграл по полубесконечному или бесконечному промежутку интегрирования, который определяется одним из следующих способов:

1. $$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)dx.$$

2. $$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)dx;$$

3. $$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty} \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Если пределы, стоящие в правой части равенств существуют и конечны, то несобственные интегралы называют сходящимися, в противном случае — расходящимися.

Несобственным интегралом II-го рода называется интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на полуинтервалах $[a,c), (c,b]$ и имеющей разрыв 2-го рода при $x = c$, который определяется формулой

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Так же, как и выше, несобственный интеграл называется сходящимся, если оба предела существуют и конечны. В противном случае несобственный интеграл называется расходящимся.

Если же точка разрыва c находится на конце промежутка, то:

а) при $c = a \quad \Rightarrow \quad \int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$;

б) при $c = b \quad \Rightarrow \quad \int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$

Пример 6.15. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость
$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}\,.$$

► Данный интеграл является несобственным интегралом I-го рода:
$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1\,. \quad ◄$$

Пример 6.16. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость
$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)^3}\,.$$

► Так как подынтегральная функция имеет разрыв 2-го рода в точке $c=1$, лежащей внутри промежутка интегрирования $[0,2]$, то данный интеграл является несобственным интегралом II-го рода:
$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)^3} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^3} + \int\limits_1^2 \frac{dx}{(x-1)^3} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^3} + $$
$$+ \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{(x-1)^3}.$$

Вычислим каждый предел отдельно:
$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^3} = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{-1}{2(x-1)^2}\Bigg|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varepsilon^2}\right) = -\infty.$$

Следовательно, на отрезке [0,1] интеграл расходится.
$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{(x-1)^3} = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{-1}{2(x-1)^2}\Bigg|_{1+\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{2\varepsilon^2}-\frac{1}{2}\right) = \infty.$$

На отрезке [1,2] интеграл также расходится. Таким образом, данный интеграл расходится на всем отрезке [0,2]. ◄

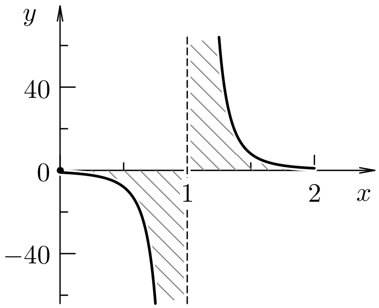


Рис. 6.2. График разрывной на отрезке $x \in [0{,}2]$ функции $y = \frac{1}{(x-1)^3}$

Заметим, что если вычислить данный интеграл, не обращая внимания на разрыв подынтегральной функции в точке $x = 1$, то можно получить неверный результат.

Действительно,

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \frac{1}{2(x-1)^2}\bigg|_0^2 =$$

$$= -\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 0,$$

что невозможно, поскольку площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \frac{1}{(x-1)^3}$ и отрезком $[0{,}2]$ оси Ox не является ограниченной, как это хорошо видно на рис. 6.2.

6.7. Вычисление площади плоской фигуры

Пусть область D ограничена линиями: $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$ так, что $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, $a < b$, где $f_1(x)$, $f_2(x)$ — функции, непрерывные на отрезке $[a, b]$ оси Ox. В этом случае площадь области D определяется формулой:

$$S_D = \int\limits_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\, dx\,.$$

Это соотношение опирается на геометрический смысл определённого интеграла.

Аналогично, если область D имеет границу, определяемую линиями: $x = \varphi_1(y)$, $x = \varphi_2(y)$, $y = c$, $y = d$ так, что $\varphi_1(y) \leqslant \varphi_2(y)$, $c < d$, где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ — функции, непрерывные на отрезке $[c, d]$ оси Oy. В этом случае площадь области D определяется формулой:

$$S_D = \int\limits_c^d \big(\varphi_2(y) - \varphi_1(y)\big)\, dy\,.$$

Пример 6.17. Вычислить площадь замкнутой области, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 3x - 1\,; \qquad y = 2x + 5\,.$$

Указание. Все указанные линии и характерные точки построить в системе координат xOy.

► Уточним расположение заданной области в системе координат xOy. Вначале найдём координаты точек пересечения графиков заданных функций: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Для этого объединим уравнения в систему и решим её:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x - 1\,; \\ y = 2x + 5\,, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x - 6 = 0\,; \\ y = 2x + 5\,, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{1,2} = \dfrac{5}{2} \pm \dfrac{\sqrt{25 + 24}}{2}\,; \\ y_{1,2} = 2\left(\dfrac{5}{2} \pm \dfrac{7}{2}\right) + 5\,, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} A(-1; 3)\,; \\ B(6; 17)\,. \end{array}$$

Для построения заданной области в системе координат xOy уточним координаты вершины параболы $y = x^2 - 3x - 1$ — точки $C(x_3, y_3)$. Приведём уравнение параболы к каноническому виду:

$$y = \left(x^2 - 2x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} - 1 \quad \Rightarrow \quad y + \frac{13}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2.$$

Слагаемые при переменных x и y указывают на координаты вершины параболы: $C(\frac{3}{2}; -\frac{13}{4})$. Искомая область в системе координат xOy построена на рис. 6.3.

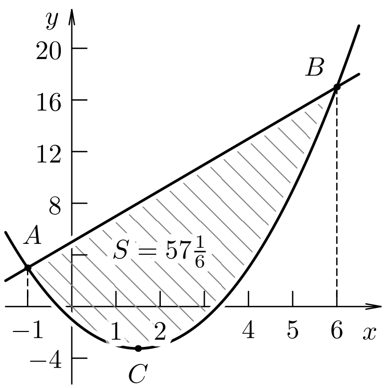


Рис. 6.3. Площадь области, ограниченной линиями

Площадь области, ограниченной сверху и снизу графиками функций $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$, вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx\,.$$

В нашем случае: $f_1(x) = x^2 - 3x - 1$; $f_2(x) = 2x + 5$;

$$f_2(x) - f_1(x) = 2x + 5 - x^2 + 3x + 1 = -x^2 + 5x + 6\,.$$

Тогда искомое значение площади замкнутой области:

$$S = \int\limits_{-1}^{6} \left(-x^2 + 5x + 6\right)\,dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 6x\right)\Bigg|_{-1}^{6} =$$

$$= \left(-\frac{216}{3} + \frac{5\cdot 36}{2} + 6\cdot 6\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 6\right) = 57\frac{1}{6}\,. \blacktriangleleft$$

6.8. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение первообразной функции и неопределённого интеграла от данной функции.
2. Перечислите основные свойства неопределённого интеграла.
3. Напишите таблицу основных неопределённых интегралов.
4. В чем сущность метода интегрирования с помощью разложения?
5. В чем сущность метода интегрирования с помощью замены переменной?
6. Напишите формулу интегрирования по частям в неопределённом интеграле.
7. В каком случае целесообразно применять метод выделения полного квадрата?
8. Что лежит в основе интегрирования рациональных дробей?
9. Какие виды простейших рациональных дробей и методов их интегрирования вы знаете?
10. Поясните на примере метод определения коэффициентов в разложении правильной рациональной дроби на простейшие.
11. Какие подстановки используются при интегрировании тригонометрических функций? Иррациональных функций?
12. Приведите некоторые специальные случаи интегрирования тригонометрических и иррациональных функций.
13. Запишите интегральную сумму для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

14. Что называется определенным интегралом функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$?
15. Каков геометрический смысл интегральной суммы и определённого интеграла?
16. Перечислите основные свойства определённого интеграла.
17. Напишите формулу Ньютона–Лейбница.
18. В чем состоит сходство и различие в реализации метода замены переменной под знаком определённого и неопределённого интегралов?
19. Напишите формулу интегрирования по частям в определённом интеграле.
20. Какие несобственные интегралы вы знаете?
21. Как вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной заданными линиями?

Глава 7

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную, неизвестную функцию этой переменной и производные функции различных порядков. Символически дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$G\big(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\big) = 0\,,$$

где G — некоторая функция $n+2$ переменных при $(n \geqslant 1)$. При этом порядок n старшей производной $y^{(n)}$, входящей в уравнение, называется *порядком дифференциального уравнения*.

Решением дифференциального уравнения называется такая функция $y = y(x)$, которая при подстановке её в это уравнение обращает его в тождество. Например, функция $y = e^x$ является решением уравнения $y'' - 2y' + y = 0$, так как $(e^x)'' - 2(e^x)' + e^x = 0$ при любых значениях $x \in \mathbb{R}$.

График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой*.

Пример 7.1. Найти решение уравнения $y'' = x^2$.

► Проинтегрируем данное уравнение 2 раза:

$$\int (y')'\,dx = \int x^2\,dx \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x^3}{3} + C_1\,,$$

$$\int y'\,dx = \int \left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) dx \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. То есть решение получено принципиально неоднозначное. Следовательно, дифференциальное уравнение задает не одну, а целое семейство интегральных кривых на плоскости.

Для выделения из семейства определенной кривой (решения) в данном случае достаточно задать точку, через которую проходит искомая интегральная кривая и направление, в котором она проходит через эту точку, т.е. задать значения:

$$x = x_0,\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0.$$

Например, если задать $y(0) = 1$ и $y'(0) = 2$, то получим:

$$y(0) = C_2 = 1,\ \ y'(0) = C_1 = 2.$$

Подставив значения констант C_1 и C_2, приходим к решению:

$$y = \frac{x^4}{12} + 2x + 1. \quad \blacktriangleleft$$

Для выделения однозначно определенного решения дифференциального уравнения n-го порядка следует задать дополнительно n условий. Условия такого рода обычно называют *начальными*.

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка называется такое его решение $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$, которое является функцией переменной x и n произвольных независимых постоянных C_1, C_2, …, C_n.

Частным решением дифференциального уравнения n-го порядка называется функция, полученная из общего решения подстановкой конкретных числовых значений произвольных постоянных C_1, C_2, …, C_n.

В примере 7.1 $y = \frac{x^4}{12} + C_1x + C_2$ — общее решение, $y = \frac{x^4}{12} + 2x + 1$ — частное решение дифференциального уравнения $y'' = x^2$.

Дифференциальное уравнение называется *разрешенным* относительно *старшей производной*, если оно имеет вид:

$$y^{(n)} = F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right).$$

Например, уравнение $y' = y^2 \cos x - 3^x$ разрешено относительно первой производной y' искомой функции y.

К дифференциальным уравнениям приводит ряд задач экономики, механики, биологии, социологии и т. д.

Пример 7.2. В демографии известно, что число новорожденных и число умерших за единицу времени пропорциональны численности населения с коэффициентами пропорциональности k_1 и k_2 соответственно, значения которых специфичны для каждого региона на данном промежутке времени. Описать протекание демографического процесса (т.е. установить закон изменения численности населения с течением времени).

► Обозначим число жителей в момент t через $y(t)$. Прирост населения Δy за время Δt равен разности между числом родившихся $k_1 y\Delta t$ и числом умерших $k_2 y\Delta t$ за это время, т. е.

$$\Delta y = k_1 y\Delta t - k_2 y\Delta t = (k_1 - k_2)y\Delta t.$$

Поделим обе части равенства на Δt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = ky, \text{ где } k = k_1 - k_2.$$

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, приходим к уравнению:

$$y' = ky,$$

решая которое (см. предыдущий пример), получаем математическую модель демографического процесса

$$y = Ce^{kt},$$

где C — постоянная, определяемая начальными условиями. В данном случае численностью населения в начальный момент времени. ◄

Теорема 7.1. Существования и единственности решения дифференциальных уравнений первого порядка. Если в дифференциальном уравнении $y' = f(x,y)$ функция $f(x,y)$ и её частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на открытом множестве G координатной плоскости Oxy, то для всякой точки (x_0,y_0) множества G найдётся единственное решение $y = y(x)$ данного уравнения, удовлетворяющее условию $y_0 = y(x_0)$. То есть через каждую точку (x_0,y_0) множества G в указанных условиях проходит одна и только одна интегральная кривая данного уравнения.

7.1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

В общем виде дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными записывается следующим образом:

$$y' = f(x)\,g(y)\,.$$

Для нахождения общего решения данного дифференциального уравнения используем следующий алгоритм:

1. Запишем производную искомой функции в виде отношения дифференциалов $y' = dy/dx$. В таком случае исходное уравнение примет вид

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)\,.$$

2. Умножим обе части уравнения на dx. В результате получим

$$dy = f(x)\,g(y)\,dx\,.$$

3. Чтобы переменные y и x были разделены знаком равенства, разделим обе части уравнения на функцию $g(y)$:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx\,.$$

4. Проинтегрировав левую и правую части полученного равенства по переменным y и x, получим *общий интеграл* дифференциального уравнения

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx\,.$$

5. Наконец, выразив y через x и C придем к общему решению дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Пример 7.3. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными

$$y'\cos^2 x = \frac{y}{\ln y}\,.$$

► Полагая $y' = dy/dx$, запишем данное уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx}\cos^2 x = \frac{y}{\ln y}\,.$$

Произведем разделение переменных. Для этого умножим обе части уравнения на $\ln y\,dx$, а затем разделим их на $y\,\cos^2 x$. После сокращения дробей получим

$$\ln y\,\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\cos^2 x}\,.$$

Теперь проинтегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int \ln y\,\frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + C \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\ln^2 y = \operatorname{tg} x + C\,.$$

Последнее выражение представляет собой общий интеграл дифференциального уравнения. Выразив из него y получим искомое общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$\ln y = \sqrt{2\operatorname{tg} x + C} \quad \Rightarrow \quad y_o = e^{\sqrt{2\operatorname{tg} x + C}}. \quad \blacktriangleleft$$

7.2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,,$$

где $p(x)$, $q(x)$ — заданные непрерывные функции аргумента x.

Решение линейного уравнения ищут в виде $y = u(x)\,v(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ — новые неизвестные функции. Подставляя в исходное уравнение $y = u\,v$ и $y' = u'v + u\,v'$, будем иметь:

$$uv' + u'v + p(x)\,uv = q(x) \quad \Rightarrow \quad u\,v' + v\,[u' + p(x)\,u] = q(x)\,.$$

Подберем функцию $u(x)$ так, чтобы выражение, содержащееся в квадратной скобке, обращалось в нуль:

$$u' + p(x)\,u = 0\,.$$

В результате исходное уравнение преобразуется к виду

$$u\,v' = q(x).$$

Оба уравнения являются уравнениями с разделяющимися переменными. Решая первое уравнение находим функцию $u = u(x)$.

Выполняем подстановку найденной функции во второе уравнение, которое после этого принимает вид

$$u(x)\,v' = q(x) \quad \Rightarrow \quad v = \int \frac{q(x)}{u(x)}\,dx\,.$$

Интегрирование последнего выражения позволяет определить вторую неизвестную функцию $v = v(x,C)$ и, перемножив функции, записать общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$y = u(x)\,v(x,C)\,.$$

Пример 7.4. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющее начальному условию:

$$x\,y' - y = -2\ln x\,, \quad y(1) = 0{,}2\,.$$

► Разделим обе части уравнения на x и представим искомую функцию в виде произведения двух новых неизвестных функций: $y = u\,v$. В таком случае исходное дифференциальное уравнение может быть записано в виде

$$u'v + u\,v' - \frac{u\,v}{x} = -\frac{2\ln x}{x} \quad \Rightarrow \quad v\left(u' - \frac{u}{x}\right) + u\,v' = -\frac{2\ln x}{x}\,.$$

Выберем функцию $u(x)$ так, чтобы выражение в скобках равнялось нулю. В результате, от линейного дифференциального уравнения перейдем к системе из двух дифференциальных уравнений, причем в первом из них переменные u и x разделяются:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} - \dfrac{u}{x} = 0\,; \\ u\,\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{2\ln x}{x}\,. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы находим функцию $u(x)$:

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln u = \ln x \quad \Rightarrow \quad u = x\,.$$

Заметим, что при интегрировании последнего выражения произвольную постоянную можно положить равной нулю, так как для решения всей системы достаточно найти частное решение первого уравнения.

Подставим полученное решение $u = x$ во второе уравнение системы. В результате тоже получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными:

$$x\,\frac{dv}{dx} = -\frac{2}{x}\ln x \quad \Rightarrow \quad dv = -\frac{2}{x^2}\ln x\,dx\,.$$

Функцию $v(x)$ найдем в результате интегрирования по частям:

$$v = 2\int -\frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left| \begin{array}{ll} f = \ln x\,, & df = \dfrac{dx}{x}\,; \\ dg = -\dfrac{dx}{x^2}\,, & g = \dfrac{1}{x} \end{array} \right| =$$

$$= 2\left(\frac{\ln x}{x} - \int \frac{dx}{x^2}\right) = \frac{2}{x}\ln x + \frac{2}{x} + 2C\,.$$

Таким образом, общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка имеет вид:

$$y_{\text{о}} = u(x)\, v(x) = 2\,(\ln x + 1 + Cx)\,.$$

Частное решение получим из общего, используя для определения произвольной постоянной заданное начальное условие:

$$y(1) = 0{,}2 \quad \Rightarrow \quad 0{,}2 = 2\,(\ln 1 + 1 + C) \quad \Rightarrow \quad C = -0{,}9\,.$$

После подстановки найденного значения постоянной интегрирования $C = -0{,}9$ в общее решение, искомое частное решение линейного дифференциального уравнения принимает вид

$$y_{\text{ч}} = 2\,(\ln x + 1 - 0{,}9x)\,. \quad \blacktriangleleft$$

7.3. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$y'' + p\,y' + q\,y = f(x)\,,$$

где p и q — заданные действительные числа; $f(x)$ — некоторая функция независимой переменной x. Если $f(x) \equiv 0$, то дифференциальное уравнение называется *однородным*; в противном случае при $f(x) \not\equiv 0$ уравнение называется *неоднородным*.

Можно доказать, что существует единственное решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, где y_0, y'_0 — некоторые действительные числа.

7.3.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим метод решения линейного *однородного* дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0\,.$$

Линейной комбинацией функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называется выражение вида

$$C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x)\,,$$

где C_1, C_2 — некоторые произвольные постоянные.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются *линейно независимыми*, если если их линейная комбинация обращается в нуль тогда и только тогда, когда коэффициенты C_1 и C_2 равны нулю.

Теорема 7.2. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — линейно независимые частные решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка, то общее решение данного уравнения является линейной комбинацией этих частных решений.

Следовательно, чтобы найти общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, надо знать два его частных линейно независимых решения: $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Будем искать частное решение дифференциального уравнения в виде e^{kx}. Подставляя эту функцию в уравнение, выводим:

$$(e^{kx})'' + p\,(e^{kx})' + q\,e^{kx} = (k^2 + p\,k + q)\,e^{kx} = 0\,.$$

Очевидно, функция e^{kx} будет решением дифференциального уравнения, если число k является корнем квадратного уравнения

$$k^2 + p\,k + q = 0\,,$$

которое называется *характеристическим уравнением* исходного дифференциального уравнения.

Как известно, для корней данного квадратного трехчлена возможны три случая.

1. Если дискриминант больше нуля ($D = p^2 - 4q > 0$), то корни характеристического уравнения действительные, простые:

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2}\,.$$

2. Если дискриминант равен нулю ($D = 0$), то корни характеристического уравнения действительные, кратные:

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2}\,.$$

3. Если дискриминант меньше нуля ($D < 0$), то корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные:

$$k_{1,2} = \alpha \pm i\beta\,, \quad \alpha = -\frac{p}{2}\,, \quad \beta = \frac{\sqrt{-D}}{2}\,,$$

где α — действительная, β — мнимая часть комплексного числа; $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

Теорема 7.3. Общее решение $y_{\text{оо}}$ линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка строится в зависимости от дискриминанта и корней характеристического уравнения:

$$y_{\text{оо}} = \begin{cases} C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} & \text{при} \quad D > 0\,; \\ e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x) & \text{при} \quad D = 0\,; \\ e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x) & \text{при} \quad D < 0\,, \end{cases}$$

где C_1, C_2 — некоторые произвольные постоянные.

Пример 7.5. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y'' + 7y' + 6y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

► Составим характеристическое уравнение, заменяя в дифференциальном уравнении производные неизвестной функции y соответствующими степенями неизвестного k: y'' заменим на k^2, y' — на k, а y — на 1. В результате получим квадратное уравнение:

$$k^2 + 7k + 6 = 0\,.$$

Дискриминант уравнения больше нуля: $D = 7^2 - 4\cdot 6 = 25 > 0$. В таком случае, корни характеристического уравнения действительные, простые: $k_1 = -6$, $k_2 = -1$. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{-6x} + C_2 e^{-x}.$$

Частное решение получим из общего, используя для определения произвольных постоянных заданные начальные условия: $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$,

$$\begin{cases} y(x) = C_1 e^{-6x} + C_2 e^{-x}; \\ y'(x) = -6C_1 e^{-6x} - C_2 e^{-x}, \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 1 = C_1 e^0 + C_2 e^0; \\ 2 = -6C_1 e^0 - C_2 e^0, \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 1\,; \\ -6C_1 - C_2 = 2\,. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим значения произвольных постоянных: $C_1 = -\frac{3}{5}$, $C_2 = \frac{8}{5}$. После подстановки найденных значений в общее решение, искомое частное решение принимает вид

$$y_{\text{чо}} = -\frac{3}{5}\,e^{-6x} + \frac{8}{5}\,e^{-x}. \quad ◀$$

Пример 7.5. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$$

▶ Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 + 4k + 4 = 0\,.$$

Дискриминант уравнения равен нулю: $D = 4^2 - 4 \cdot 4 = 0$. В таком случае, корни характеристического уравнения действительные, кратные: $k_{1,2} = -4/2 = -2$. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = e^{-2x}(C_1 + C_2 x)\,.$$

Найдем производную общего решения и определим произвольные постоянные из начальных условий: $y(0) = 2$; $y'(0) = 3$,

$$\begin{cases} y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-2x} x\,; \\ y'(x) = -2C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-2x} - 2C_2 e^{-x} x\,, \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 2 = C_1 e^0 + C_2 e^0 \cdot 0\,; \\ 3 = -2C_1 e^0 + C_2 e^0 - 2C_2 e^0 \cdot 0\,, \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 2\,; \\ -2C_1 + C_2 = 3\,. \end{cases}$$

Находим значения произвольных постоянных: $C_1 = 2$, $C_2 = 7$ и подставим их в общее решение. Искомое частное решение принимает вид

$$y_{\text{чо}} = e^{-2x}(2+7x)\,. \quad ◄$$

Пример 7.5. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, удовлетворяющее начальным условиям:

$$y'' - 4y' + 13y = 0, \quad y(\pi) = e^{2\pi}, \quad y'(\pi) = -e^{2\pi}.$$

► Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4k + 13 = 0\,.$$

Дискриминант меньше нуля: $D = (-4)^2 - 4\cdot 13 = -36 < 0$. В таком случае, корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные: $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, где $\alpha = 4/2 = 2$, $\beta = \sqrt{36}/2 = 3$. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)\,.$$

Используем для определения произвольных постоянных заданные начальные условия: $y(\pi) = e^{2\pi}$, $y'(\pi) = -e^{2\pi}$:

$$\begin{cases} y(x) = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)\,; \\ y'(x) = e^{2x}((2C_1 + 3C_2)\cos 3x + (2C_2 - 3C_1)\sin 3x)\,, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} e^{2\pi} = e^{2\pi}(C_1 \cos 3\pi + C_2 \sin 3\pi)\,; \\ -e^{2\pi} = e^{2\pi}((2C_1 + 3C_2)\cos 3\pi + (2C_2 - 3C_1)\sin 3\pi)\,, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} -C_1 = 1\,; \\ 2C_1 + 3C_2 = -1\,. \end{cases}$$

Отсюда $C_1 = -1$, $C_2 = \frac{1}{3}$. После подстановки найденных значений в общее решение, получим:

$$y_{\text{чо}} = e^{2x}\left(-\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x\right)\,. \quad ◄$$

7.3.2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим метод решения линейного *неоднородного* дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$y'' + p\,y' + q\,y = f(x)\,.$$

Теорема 7.4. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения $y_{\text{он}}$ представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения $y_{\text{оо}}$ и какого-либо частного решения исходного неоднородного уравнения $y_{\text{чн}}$:

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}}\,.$$

Таким образом, чтобы найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами p, q и с правой частью специального вида $f(x)$ необходимы следующие действия:

1. Отбросив правую часть, найти общее решение однородного дифференциального уравнения (см. предыдущий раздел).
2. Указать вид частного решения неоднородного дифференциального уравнения в соответствии с правой частью $f(x)$.
3. Найти числовые значения неопределённых коэффициентов и записать частное решение дифференциального уравнения $y_{\text{чн}}$ (см. в этом разделе далее).
4. Записать общее решение неоднородного дифференциального уравнения $y_{\text{он}}$ в виде суммы найденных выше общего $y_{\text{оо}}$ и частного решения $y_{\text{чн}}$.

Вид частного решения неоднородного дифференциального уравнения $y_{\text{чн}}$ зависит от вида функции $f(x)$, стоящей в его правой части. Рассмотрим два наиболее простых случая.

I случай. Пусть правая часть имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n\right),$$

где $\alpha, a_0, a_1, \ldots, a_n$ — заданные постоянные коэффициенты. Тогда частное решение неоднородного дифференциального уравнения $y_{\text{чн}}$ имеет вид

$$y_{\text{чн}} = x^r e^{\alpha x}\left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n\right),$$

где $b_0, b_1, \ldots, b_n$ — неопределенные коэффициенты.

Константа r равна числу совпадений параметра α с корнями характеристического уравнения:

$$r = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \alpha \neq k_1 \quad \text{и} \quad \alpha \neq k_2\,; \\ 1 & \text{при} \quad \alpha = k_1 \quad \text{и} \quad \alpha \neq k_2\,; \\ 2 & \text{при} \quad \alpha = k_1 \quad \text{и} \quad \alpha = k_2\,. \end{cases}$$

Значения неопределенных коэффициентов b_i определяют, исходя из того, что $y_{\text{чн}}$ является решением исходного дифференциального уравнения. Для этого следует продифференцировать функцию $y_{\text{чн}}$ два раза (учитывая, что коэффициенты b_i являются константами), подставить выражения для $y_{\text{чн}}$, $y'_{\text{чн}}$ и $y''_{\text{чн}}$ в исходное дифференциальное уравнение. После сокращения на общий множитель $e^{\alpha x}$ и приведения подобных, нужно сгруппировать слагаемые по степеням переменной x. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного уравнения, переходят к системе уравнений относительно неизвестных коэффициентов b_i. Решив эту систему, записывают частное решение $y_{\text{чн}}$ с найденными значениями коэффициентов b_i.

Пример 7.6. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3x}(2 + 9x)\,.$$

► Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 6k + 9 = 0\,.$$

Дискриминант уравнения равен нулю: $D = (-6)^2 - 4 \cdot 9 = 0$. В таком случае, корни характеристического уравнения действительные, кратные: $k_{1,2} = 6/2 = 3$. Следовательно, общее решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего исходному, имеет вид

$$y_{\text{оо}} = e^{3x}(C_1 + C_2 x)\,.$$

Выпишем правую часть данного дифференциального уравнения: $f(x) = e^{3x}(2 + 9x)$. Так как в правой части присутствует множитель e^{3x}, то $\alpha = 3$. Также заметим, что число α совпадает с кратными корнями характеристического уравнения: $\alpha = 3 = k_{1,2}$. Отсюда следует, что $r = 2$.

Наличие множителя $(2 + 9x)$ в правой части неоднородного дифференциального уравнения говорит о том, что частное решение будет содержать многочлен первого порядка с двумя неизвестными коэффициентами: $P_1(x) = b_0 + b_1 x$.

В результате, частное решение неоднородного дифференциального уравнения будет иметь вид

$$y_{\text{чн}} = e^{3x}(b_0 + b_1 x)x^2 = e^{3x}(b_0 x^2 + b_1 x^3)\,.$$

Для определения неизвестных коэффициентов b_i дважды продифференцируем полученную форму частного решения:

$$y'_{\text{чн}} = e^{3x}(2b_0 x + 3(b_0 + b_1)x^2 + 3b_1 x^3)\,,$$
$$y''_{\text{чн}} = e^{3x}(2b_0 + 6(2b_0 + b_1)x + 9(b_0 + 2b_1)x^2 + 9b_1 x^3)\,.$$

Подставим выражения для $y_{\text{чн}}$, $y'_{\text{чн}}$, $y''_{\text{чн}}$ в исходное дифференциальное уравнение. После сокращения на общий множитель e^{3x}, приведения подобных и группировки по степеням переменной x получим следующее уравнение:

$$2b_0 + 6b_1 x = 2 + 9x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, перейдем к эквивалентной системе уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{c|l} x^1 & 6b_1 = 9\,; \\ x^0 & 2b_0 = 2\,. \end{array} \right.$$

Отсюда находим значения неизвестных коэффициентов:

$$b_1 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}\,, \quad b_0 = \frac{2}{2} = 1\,.$$

В итоге, частное решение неоднородного дифференциального уравнения записывается в виде

$$y_{\text{чн}} = e^{3x}\left(x^2 + \frac{3}{2}\,x^3\right).$$

Тогда, искомое общее решение примет вид

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = e^{3x}\left(C_1 + C_2 x + x^2 + \frac{3}{2}\,x^3\right). \quad \blacktriangleleft$$

II случай. Пусть правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$f(x) = a_0 \cdot \cos\beta x + a_1 \cdot \sin\beta x\,,$$

где β, a_0, a_1 — некоторые действительные числа, причем $\beta \neq 0$. В этом случае частное решение неоднородного дифференциального уравнения $y_{\text{чн}}$ примет вид

$$y_{\text{чн}} = x^r\left(b_0\cos\beta x + b_1\sin\beta x\right),$$

где b_0, b_1 — неизвестные коэффициенты.

Константа r равна либо 0 либо 1:

$$r = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad p = 0 \quad \text{и} \quad q > 0 \quad \text{и} \quad \beta = \sqrt{q}\,; \\ 0 & \text{во всех остальных случаях}\,. \end{cases}$$

Отыскать значения неопределенных коэффициентов b_i следует так же, как и в случае I с одной разницей: после приведения подобных, группировку слагаемых производят при одинаковых функциях переменной x, т. е. приравнивают коэффициенты при функциях $\sin\beta x$ и $\cos\beta x$ в левой и правой частях полученного уравнения.

Пример 7.7. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' - 6y' + 5y = 2\cos 3x.$$

► Составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 6k + 5 = 0\,.$$

Дискриминант уравнения больше нуля: $D = (-6)^2 - 4\cdot 5 = 16 > 0$. В таком случае: $k_1 = 6/2 + \sqrt{16}/2 = 5$, $k_2 = 6/2 - \sqrt{16}/2 = 1$. Следовательно, общее решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего исходному, имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1e^{5x} + C_2e^{x}.$$

Правая часть неоднородного дифференциального уравнения: $f(x) = 2\cos 3x$. Имеем II случай. Число $\beta = 3 \neq \sqrt{q} = \sqrt{5}$, следовательно $r = 0$. Запишем частное решение в виде

$$y_{\text{чн}} = b_0\cos 3x + b_1\sin 3x\,.$$

Для определения неизвестных коэффициентов b_0, b_1 дважды продифференцируем полученную форму частного решения:

$$y'_{\text{чн}} = -3b_0\sin 3x + 3b_1\cos 3x\,, \quad y''_{\text{чн}} = -9b_0\cos 3x - 9b_1\sin 3x\,.$$

Подставим выражения для $y_{\text{чн}}$, $y'_{\text{чн}}$, $y''_{\text{чн}}$ в исходное дифференциальное уравнение. После группировки по одноименным тригонометрическим функциям аргумента $3x$ получим следующее уравнение:

$$(-4b_0 - 18b_1)\cos 3x + (18b_0 - 4b_1)\sin 3x = 2\cos 3x\,.$$

Приравняв коэффициенты при одноимённых тригонометрических функциях, перейдём к эквивалентной системе уравнений:

$$\left\{\begin{array}{c|r} \cos 3x & -4b_0 - 18b_1 = 2\,; \\ \sin 3x & 18b_0 - 4b_1 = 0\,. \end{array}\right.$$

Находим значения неизвестных коэффициентов, решая последнюю систему:

$$b_1 = -\frac{9}{85}\,, \qquad b_0 = -\frac{2}{85}\,.$$

Подставляя значения коэффициентов, получим

$$y_{\text{чн}} = -\frac{2}{85}\cos 3x - \frac{9}{85}\sin 3x\,.$$

Тогда, искомое общее решение можно записать в виде

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}} + y_{\text{чн}} = C_1 e^{5x} + C_2 e^{x} - \frac{2}{85}\cos 3x - \frac{9}{85}\sin 3x\,. \quad \blacktriangleleft$$

III случай. Пусть правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами является суммой нескольких функций.

Тогда частное решение $y_{\text{чн}}$ такого уравнения будет равно сумме частных решений:

$$y_{\text{чн}}(x) = y_1(x) + y_2(x) + \ldots + y_n(x)\,,$$

где каждое из частных решений $y_i(x)$ соответствует дифференциальному уравнению:

$$y'' + p\,y' + q\,y = f_i(x)\,,$$

при $i = 1, 2, \ldots, n$.

7.4. Контрольные вопросы

1. Какое уравнение называется дифференциальным? Как определяется порядок дифференциального уравнения?
2. Что называется общим решением дифференциального уравнения? Частным решением?
3. Каков геометрический смысл общего и частного решений дифференциального уравнения первого порядка?

4. Сформулируйте теорему существования и единственности. Каков её геометрический смысл?
5. Приведите примеры дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными. Укажите способ его решения.
6. Какое дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным? Укажите способ его решения.
7. Каков вид линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
8. Напишите формулу общего решения линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в зависимости от корней характеристического уравнения.
9. Какую структуру имеет общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
10. Укажите вид частного решения линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида $e^{\alpha x}P_n(x)$, где $P_n(x)$ — многочлен степени $n \geqslant 0$.

Глава 8

Числовые и функциональные ряды

Числовым рядом называется бесконечная последовательность чисел u_1, u_2, ..., u_n, ..., формально соединённых знаком сложения:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \, .$$

Числа u_1, u_2, ..., u_n, ... называются *членами ряда*, а выражение $u_n = f(n)$ — n*-ым* или *общим членом ряда*.

Сумма n первых членов ряда называется n*-ой частичной суммой ряда*: $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

Ряд называется *сходящимся*, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм, являющийся суммой ряда:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \, ,$$

и *расходящимся*, если указанный предел расходится или не существует

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \, .$$

Расходящийся ряд конечной суммы не имеет.

В качестве примеров приведём следующие числовые ряды:

1. *Гармонический ряд*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{— расходится;}$$

2. *Обобщенный гармонический ряд* $(p > 0)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

сходится при $p > 1$, расходится при $p \leq 1$.

3. *Геометрический ряд*

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}\,,$$

где a — начальный член; q — знаменатель геометрической прогрессии. Геометрический ряд сходится к сумме $S = \frac{a}{1-q}$ при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geqslant 1$.

8.1. Знакоположительные числовые ряды

Знакоположительным рядом называется ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, члены которого неотрицательны $u_n \geq 0$.

Необходимый признак сходимости. Если числовой ряд сходится, то предел его общего члена u_n при $n \to \infty$ равен нулю:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ — сходится} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} u_n = 0\,.$$

Следствие. Если предел общего члена ряда при $n \to \infty$ не равен нулю, то ряд расходится:

$$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ — расходится}\,.$$

Пример 8.1. Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости для числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n - 4}\,.$$

► Для проверки необходимого признака сходимости выпишем и найдем предел общего члена данного числового ряда

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3^n - 4} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}\,.$$

Для раскрытия неопределенности такого типа воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3^n - 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2)'}{(3^n - 4)'} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3^n \ln 3} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}\,.$$

Применяя правило Лопиталя повторно, получим:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3^n \ln 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)'}{(3^n \ln 3)'} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3^n \ln^2 3} = \frac{2}{\infty} = 0\,.$$

Необходимый признак сходимости для данного числового ряда выполняется, следовательно, расходимость ряда не доказана. ◄

Признак сравнения. Пусть даны два положительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$. Если члены первого ряда u_n не превосходят соответствующих членов второго ряда v_n, т.е. $u_n \leqslant v_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то из сходимости второго ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ следует сходимость первого ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, а из расходимости первого ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ следует расходимость второго ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Пример 8.2. Используя признак сравнения, исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^{n-1}}.$$

► Сравним данный ряд с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n-1}}$. Последний является геометрической прогрессией со знаменателем $q = \frac{1}{5} < 1$, т.е. сходящимся рядом. Так как $u_n = \frac{1}{n\cdot 5^{n-1}} < v_n = \frac{1}{5^{n-1}}$, то по признаку сравнения данный числовой ряд сходится. ◄

Предельный признак сравнения. Если для двух знакоположительных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ существует конечный, отличный от нуля предел отношения их общих членов $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A \neq 0$, то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

Пример 8.3. Используя предельный признак сравнения, исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+3}.$$

► Если общий член ряда представляет собой отношение двух многочленов, то при подборе эталонного обобщенного гармонического ряда значение p выбирают равным разности наибольших показателей степеней знаменателя и числителя. Так как в нашем случае $p = 3-1 = 2$, то для сравнения возьмем обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, который сходится. Применяя предельный признак, найдем

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^3+3} : \frac{1}{n^2} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3+3} = 1.$$

Поскольку предел A конечен и отличен от нуля, то исследуемый ряд также является сходящимся. ◄

Признак сходимости Даламбера. Если для знакоположительного ряда существует предел отношения $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ при $n \to \infty$, то в зависимости от значения этого предела возможны три случая:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = D \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \quad \text{числовой ряд сходится;} \\ > 1 & \Rightarrow \quad \text{числовой ряд расходится;} \\ = 1 & \Rightarrow \quad \text{сомнительный случай.} \end{cases}$$

Пример 8.4. Используя признак сходимости Даламбера, исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n+1}}\,.$$

► Для проверки сходимости с помощью признака Даламбера запишем предел отношения $(n+1)$-го члена к n-му:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2} < 1\,.$$

Так как предел полученного выражения меньше единицы, следовательно, данный числовой ряд сходится. ◄

Интегральный признак Коши. Пусть члены знакоположительного числового ряда u_n соответствуют при $n = 1, 2, 3, \ldots$ значениям некоторой функции $u_n = f(n)$, положительной, непрерывной, монотонно убывающей на интервале $x \in [1; \infty)$. Тогда несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ и соответствующий числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример 8.5. Используя интегральный признак сходимости Коши, исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{\sqrt{1+n^2}}\,.$$

► Для проверки сходимости с помощью интегрального признака Коши запишем формулу общего члена ряда в виде функции натурального аргумента $f(n) = \frac{3n}{\sqrt{1+n^2}}$ и составим соответствующую ей функцию действительного аргумента $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}$, а затем вычислим несобственный интеграл от полученной функции:

$$\int\limits_1^\infty \frac{3x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = 3\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

Определенный интеграл, стоящий под знаком предела, вычисляется с помощью подстановки $t = 1 + x^2$:

$$\int\limits_1^b \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left|\begin{array}{c} t = 1 + x^2\,; \\ dt = 2x\,dx\,; \quad x\,dx = \frac{1}{2}dt\,; \\ t(1) = 2\,; \quad t(b) = 1 + b^2 \end{array}\right| = \int\limits_2^{1+b^2} \frac{dt}{2\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t}\,\Big|_2^{1+b^2} = \sqrt{1+b^2} - \sqrt{2}\,.$$

Вычисляя предел полученного выражения, приходим к выводу, что заданный числовой ряд расходится:

$$\int\limits_1^\infty \frac{3x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = 3\lim_{b\to\infty}\left(\sqrt{1+b^2} - \sqrt{2}\right) = \infty\,. \quad \blacktriangleleft$$

8.2. Знакопеременные числовые ряды

Знакочередующимся называется числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$, где $u_n > 0$, а любые два соседних члена имеют разные знаки.

Признак Лейбница. Пусть для знакочередующегося числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$, где $u_n > 0$, выполнены условия:

1. Члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине: $u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots$
2. Общий член ряда стремится к нулю $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Тогда ряд сходится, причём его сумма по модулю не превосходит первого слагаемого $0 < S \leqslant u_1$.

Знакопеременным называется числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, который содержит как положительные, так и отрицательные члены.

Заметим, что знакочередующийся числовой ряд является частным случаем знакопеременного числового ряда.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, составленный из абсолютных величин его членов. Сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ влечет за собой сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *условно сходящимся*, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится, а исходный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

Пример 8.6. Используя признак Лейбница, исследовать на сходимость знакочередующийся ряд. В случае сходимости ряда, определить тип сходимости.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+7}.$$

► Для проверки сходимости с помощью признака Лейбница заметим, что при $n \geqslant 3$ члены данного ряда $u_n = \frac{n}{n^2+7}$ монотонно убывают по абсолютной величине:

$$\frac{3}{3^2+7} > \frac{4}{4^2+7} > \ldots > \frac{n}{n^2+7} > \ldots \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+7} = 0.$$

Отбрасывание конечного числа членов не влияет на его сходимость, поэтому по признаку Лейбница ряд сходится.

Определим тип сходимости ряда. Для этого исследуем сходимость ряда, составленного из абсолютных величин его членов: $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+7}$. Применяя предельный признак сравнения, возьмём в качестве эталонного ряда гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ и вычислим предел:

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+7} \cdot \frac{n}{1} \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+7} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = 1,$$

который оказывается конечен и отличен от нуля. Следовательно, исследуемый ряд ведёт себя так же, как и эталонный ряд. Из расходимости эталонного ряда следует расходимость исследуемого ряда.

Таким образом, сам ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится, т.е. исходный ряд сходится условно. ◄

8.3. Степенные ряды

Функциональным называется ряд, членами которого являются функции действительной переменной x и натуральной переменной n:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

При любом фиксированном значении $x = x_0$ функциональный ряд вырождается в числовой ряд, который либо сходится (абсолютно или условно), либо расходится.

Степенным рядом называется функциональный ряд вида:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

где a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_n — постоянные вещественные числа, называемые *коэффициентами* степенного ряда.

Областью сходимости степенного ряда называется множество X всех значений x, для которых он сходится. Доказано, что областью сходимости степенного ряда является интервал $x \in (-R, R)$. В каждой точке этого интервала ряд сходится, а вне этого интервала, т.е. при $x \in (-\infty, -R) \cup (R, \infty)$ — расходится. Интервал $(-R, R)$ называется *интервалом сходимости* степенного ряда, а R — его *радиусом сходимости*. Для некоторых рядов интервал сходимости вырождается в точку: $R = 0$, а для других может совпадать с осью Ox: $R = \infty$. В точках $x = \pm R$ ряд может как сходиться, так и расходиться. В каждом конкретном случае этот вопрос решается индивидуально, с помощью исследования соответствующих числовых рядов. Если степенной ряд является полным (т.е. содержит все степени переменной x), то наиболее часто употребляемые формулы для вычисления радиуса сходимости степенного ряда имеют вид:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad \text{или} \qquad R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}\,.$$

Свойства степенных рядов

1. Сумма степенного ряда $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ есть непрерывная на отрезке $[-R, R]$ функция.
2. Если степенной ряд $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится на интервале $(-R, R)$, то степенные ряды, полученные почленным дифференцированием и почленным интегрированием этого ряда имеют тот же интервал сходимости $(-R, R)$.

Пример 8.7. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^{2n-1}}\, x^n.$$

► Если обозначить радиус сходимости степенного ряда как R, то областью его сходимости является интервал $(-R, R)$ и, возможно, границы этого интервала.

Заданный степенной ряд содержит все натуральные степени переменной x, следовательно, радиус его сходимости может быть найден по формуле:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{2n-1}} \cdot \frac{2^{2n+1}}{n+2} = 4 \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 4\,.$$

Вопрос о принадлежности границ интервала к области сходимости решается с помощью исследования поведения числового ряда при $x = \pm R$. При $x = -4$ получим знакочередующийся числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^{2n-1}} (-4)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^{2n-1}} 2^{2n} (-1)^n = 2\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)(-1)^n = -4 + 6 - \ldots$$

Предел абсолютного значения n-го члена полученного ряда не равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty} |\,u_n\,| = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty\,,$$

следовательно, согласно признаку Лейбница данный числовой ряд является расходящимся. При $x = 4$ получим знакопостоянный числовой ряд, который в силу необходимого признака сходимости также является расходящимся:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^{2n-1}} 4^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^{2n-1}} 2^{2n} = 2\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) = 4 + 6 + \ldots$$

Объединяя полученные результаты, можно записать область сходимости заданного степенного ряда в виде открытого интервала $x \in (-4, 4)$. ◄

8.3.1. Ряды Тейлора и Маклорена

Предположим, что функция $f(x)$ определена и имеет производные всех порядков в окрестности точки $x = x_0$. Тогда она может быть разложена в *ряд Тейлора*:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

Последнее равенство справедливо лишь в том случае, когда так называемый остаточный член

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \alpha(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \text{ где } 0 < \alpha < 1$$

стремится к нулю при $n \to \infty$. Если предел остаточного члена не равен нулю, то ряд не представляет данной функции, хотя может и сходиться к какой-либо другой функции.

В частном случае при $x_0 = 0$ ряд Тейлора называется *рядом Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \ldots$$

Разложение основных элементарных функций в ряд Маклорена приведено в приложении Б.13.

8.4. Приложения степенных рядов

8.4.1. Вычисление определённых интегралов

Разложение функций в степенные ряды даёт инструмент, позволяющий весьма эффективно вычислить *приближенные* значения определённых интегралов, в том числе и так называемых «неберущихся». При вычислении значения определённого интеграла от функции $f(x)$, в случае, если $f(x)$ разлагается в ряд Маклорена, её разложение можно интегрировать почленно внутри интервала сходимости. С ростом числа членов, учитываемых в разложении функции $f(x)$, ошибка интегрирования снижается, а точность — возрастает.

Если $f(x)$ в точке $x = x_1$ представляет собой знакочередующийся ряд, удовлетворяющий признаку Лейбница, то погрешность $R_n(x_1)$ приближенного значения $f(x_1) \approx S_n(x_1)$ не превышает по абсолютной величине модуля первого отброшенного члена:

$$|R_n(x_1)| \leq |u_{n+1}(x_1)| = \frac{|f^{(n+1)}(x_1)|}{(n+1)!}\ |x_1 - x_0|^{n+1}.$$

Пример 8.8. Вычислить указанный определённый интеграл с точностью до 0,001 с помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд

$$\int\limits_0^{1/2} e^{-x^2/2} dx\,.$$

► Выполним разложение подынтегральной функции в ряд Маклорена с помощью замены переменной $t = -x^2/2$ в разложении табличной функции e^t (см. приложение Б.13):

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ldots, \qquad t \in (-\infty, \infty);$$
$$e^{-x^2/2} = 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 1!} + \frac{x^4}{4 \cdot 2!} - \frac{x^6}{8 \cdot 3!} + \ldots, \qquad x \in (-\infty, \infty).$$

Интегрируя обе части полученного равенства на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$, лежащем внутри интервала сходимости $(-\infty, \infty)$, получим:

$$\int\limits_0^{1/2} e^{-x^2/2} dx = \int\limits_0^{1/2} \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 1!} + \frac{x^4}{4 \cdot 2!} - \ldots\right) dx =$$
$$= \left(x - \frac{x^3}{6 \cdot 1!} + \frac{x^5}{20 \cdot 2!} - \ldots\right)\Bigg|_0^{1/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{48} + \frac{1}{1280} - \ldots$$

Получаем знакочередующийся числовой ряд, удовлетворяющий признаку Лейбница, а так как $\frac{1}{48} \approx 0{,}021 > 0{,}001$ и $\frac{1}{1280} \approx 0{,}0008 < 0{,}001$, то с точностью до 0,001 имеем:

$$\int\limits_0^{1/2} e^{-x^2/2} dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{48} \approx 0{,}479. \quad \blacktriangleleft$$

8.4.2. Решение задачи Коши

Пусть необходимо найти частное решение $y(x)$ дифференциального уравнения 2-го порядка, удовлетворяющего начальным условиям:

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0.$$

Будем искать решение $y(x)$ в виде ряда Маклорена до n-го члена включительно:

$$y(x) = f(0) + \frac{y'(0)}{1!}\, x + \frac{y''(0)}{2!}\, x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}\, x^n.$$

Значения $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ известны, поэтому сразу находится значение $y''(x_0) = f(x_0, y_0, y'_0)$. Для нахождения значений следующих коэффициентов степенного ряда необходимо последовательно вычислять производные от выражения $y'' = f(x, y, y')$ и подставлять в них уже известные значения предыдущих производных. Так же как и при вычислении определенного интеграла с ростом числа членов, учитываемых в разложении $y(x)$, ошибка решения снижается, а точность — возрастает.

Пример 8.9. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции, удовлетворяющей решению указанной задачи Коши:

$$y'' + xy' + y = x\cos x\,, \quad y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1\,.$$

► Будем искать решение уравнения в виде степенного ряда

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}\,x + \frac{y''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}\,x^3 + \ldots$$

Из начальных условий уже известны значения $y(0)$ и $y'(0)$. Тогда $y''(0)$ можно найти, подставив эти значения в исходное дифференциальное уравнение:

$$y''(x) = x\cos x - xy' - y \qquad \Rightarrow \qquad y''(0) = 0\,.$$

Для нахождения коэффициентов последующих членов ряда продифференцируем исходное уравнение необходимое число раз и вычислим значения полученных производных при $x = 0$:

$$\begin{aligned}
y'''(x) &= \cos x - x\sin x - y' - xy'' - y' = \\
&= \cos x - x\sin x - 2y' - xy'' \quad \Rightarrow \quad y'''(0) = -1\,;\\
y^{(4)}(x) &= -\sin x - \sin x - x\cos x - 2y'' - y'' - xy''' = \\
&= -2\sin x - x\cos x - 3y'' - xy''' \quad \Rightarrow \quad y^{(4)}(0) = 0\,;\\
y^{(5)}(x) &= -2\cos x - \cos x + x\sin x - 3y''' - y''' - xy^{(4)} = \\
&= -3\cos x + x\sin x - 4y''' - xy^{(4)} \quad \Rightarrow \quad y^{(5)}(0) = 1\,.
\end{aligned}$$

Подставляя найденные значения производных в степенной ряд, получаем искомое частное решение:

$$y(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \qquad ◄$$

8.5. Контрольные вопросы

1. Какое выражение называется рядом? Что называется частичной и полной суммой ряда?
2. Какие ряды называются сходящимися и расходящимися? Как формулируется необходимый признак сходимости ряда?
3. Сформулируйте достаточные признаки сходимости знакоположительных числовых рядов: признаки сравнения, признак Даламбера, интегральный признак Коши.

4. Какие ряды называются абсолютно и условно сходящимися?
5. Сформулируйте признак Лейбница.
6. Если переставить члены ряда, то изменится ли его сумма: а) для абсолютно сходящегося ряда; б) для условно сходящегося ряда?
7. Какое выражение называется степенным рядом?
8. Какова связь между радиусом и интервалом сходимости степенного ряда? Как вычисляется радиус сходимости степенного ряда?
9. Какие ряды называются рядами Тейлора и Маклорена для функции $y = f(x)$?
10. Какие задачи можно решать с помощью степенных рядов?
11. На каких свойствах степенных рядов основано их применение в приближенных вычислениях определённых интегралов и в интегрировании дифференциальных уравнений?
12. Дайте определение n-го остатка ряда.
13. Чем ограничена погрешность приближенного вычисления суммы сходящегося знакочередующегося ряда?
14. Какой ряд называется рядом Фурье и как вычисляются коэффициенты Фурье?
15. Сформулируйте теорему Дирихле.
16. Запишите ряд Фурье для чётных и нечётных функций.
17. Запишите ряд Фурье для функций с произвольным периодом.

Глава 9

Комплексные числа

9.1. Алгебраическая форма комплексного числа

Комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y — действительные числа, а i — так называемая *мнимая единица*, которая определяется равенством $i = \sqrt{-1}$ или $i^2 = -1$. Такая форма записи комплексного числа называется *алгебраической*. Действительные числа x и y называются соответственно *действительной* и *мнимой* частями комплексного числа z и обозначаются: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Комплексной число $z = iy$ (при $x = 0$) называется *чисто мнимым*. Если $y = 0$, то получается действительное число: $x + i0 = x$. Множество всех комплексных чисел обозначают $\mathbb{C} = \{z : z = x + iy,$ $x,\ y \in \mathbb{R}\}$, где $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел, причём $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ *равны*, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить точкой $M(x, y)$ плоскости xOy или её радиусом-вектором $\overline{OM}$. Такая плоскость называется комплексной с действительной Ox и мнимой Oy осями.

Числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются *комплексно сопряжёнными*. Например, $z = -3 + 2i$ и $\bar{z} = -3 - 2i$.

9.1.1. Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$.

1. *Сложение (вычитание)* комплексных чисел:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2).$$

2. *Умножение* комплексных чисел:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

3. *Деление* двух комплексных чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}, \quad \text{где } z_2 \neq 0.$$

В квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом $D = b^2 - 4ac < 0$ корни образуют пару комплексно-сопряжённых чисел:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm i\sqrt{\frac{4ac - b^2}{4a^2}}\,.$$

Пример 9.1. Даны два комплексных числа $z_1 = 5 + 3i$ и $z_2 = 4 - 6i$. **Найти** их сумму и разность $z_1 \pm z_2$, произведение z_1z_2 и частное $\frac{z_1}{z_2}$.

► Поскольку оба комплексных числа заданы в алгебраической форме, то для нахождения их суммы, разности и произведения воспользуемся вышеприведёнными соотношениями с учётом того, что $i^2 = -1$:

$$z_1 + z_2 = (5 + 3i) + (4 - 6i) = 9 - 3i\,;$$
$$z_1 - z_2 = (5 + 3i) - (4 - 6i) = 1 + 9i\,;$$
$$z_1z_2 = (5 + 3i)(4 - 6i) = 20 - 30i + 12i - 18i^2 = 38 - 18i\,,$$

Для нахождения частного умножим числитель и знаменатель на сопряженное делителю комплексное число $4 + 6i$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5 + 3i}{4 - 6i} = \frac{(5 + 3i)(4 + 6i)}{(4 - 6i)(4 + 6i)} =$$
$$= \frac{20 + 30i + 12i + 18i^2}{16 - 36i^2} = \frac{2 + 42i}{52} = \frac{1}{26} + \frac{21}{26}i. \quad ◄$$

9.2. Тригонометрическая форма комплексного числа

Изобразим комплексное число $z = x + iy$ радиусом-вектором $\overline{OM}$ на комплексной плоскости (см. на рис. 9.1). Длина этого вектора $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем* комплексного числа z и обозначается через $|z|$, т.е. $|z| = r$, а угол φ между осью Ox и вектором $\overline{OM}$, отсчитываемый в положительном направлении, называется *аргументом* комплексного числа z и обозначается $\varphi = \operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Из множества значений $\operatorname{Arg} z$ выделяется *главное* значение $\arg z$, удовлетворяющее условию $-\pi < \arg z \leqslant \pi$. Тогда $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Отметим, что для $z = 0$ аргумент не определён.

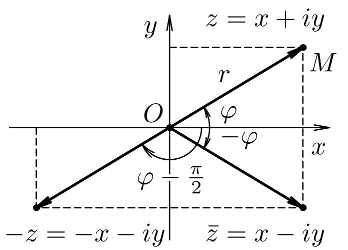


Рис. 9.1. Представление чисел z, $\bar{z}$ и $-z$ на комплексной плоскости

Очевидно, что действительная x и мнимая y части комплексного числа связаны с его модулем r и аргументом φ соотношениями:

$$x = r\cos\varphi, \;\; y = r\sin\varphi.$$

Следовательно, комплексное число $z = x + iy$ можно записать в *тригонометрической форме:*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Пример 9.2. Найти модуль $|z| = r$ и аргумент $\arg z = \varphi$ комплексного числа $z = 1 - i$ и записать последнее в тригонометрической форме.

► Модуль комплексного числа $|z| = r$ равен

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Главное значение аргумента комплексного числа $\arg z = \varphi$ найдём из соотношений:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{-1}{1} = -1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, в тригонометрической форме комплексное число $z = 1 - i$ будет иметь вид

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right). \quad ◄$$

9.2.1. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

1. *Умножение* комплексных чисел:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\ = r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right).$$

2. *Деление* комплексных чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \\ = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right).$$

Таким образом, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

3. *Возведение в степень* комплексного числа. Если n — целое положительное число, то справедлива формула Муавра:

$$z^n = \left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

т.е. при возведении комплексного числа в целую положительную степень, модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.

4. *Извлечение корня* n-ой степени из комплексного числа:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Таким образом, корень n-й степени из не равного нулю комплексного числа имеет n различных значений. При $k = n, n+1, \ldots$ значения корня $\sqrt[n]{z}$ будут повторяться.

Пример 9.3. Комплексные числа $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = -\sqrt{3} + i$ представить в тригонометрической форме и найти: 1) произведение $z_1 z_2$; 2) частное $\frac{z_1}{z_2}$; 3) целую положительную степень z_1^{16}; 4) все значения корня $\sqrt[3]{z_2}$.

► Найдём модуль и аргумент комплексного числа z_1:

$$r_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}; \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{1}{1} = 1; \quad \varphi_1 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Для z_2 аналогично получим:

$$r_2 = \sqrt{3+1} = 2; \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{1}{-\sqrt{3}}; \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{-\sqrt{3}} = \frac{5\pi}{6}.$$

Отсюда следует, что $z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

1. В таком случае произведение комплексных чисел $z_1 z_2$ в тригонометрической форме можно записать:

$$z_1 z_2 = \sqrt{2} \cdot 2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{6}\right) \right] = \\ = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12} \right).$$

2. Частное комплексных чисел $\frac{z_1}{z_2}$ в тригонометрической форме определяется аналогично:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{5\pi}{6}\right) \right] = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{-7\pi}{12} + i \sin \frac{-7\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} - i \sin \frac{7\pi}{12} \right).$$

3. Целую положительную степень z_1^{16} найдём, применяя формулу Муавра:

$$z_1^{16} = (1+i)^{16} = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^{16} = \\ = (\sqrt{2})^{16} \left[\cos\left(16\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(16\frac{\pi}{4}\right) \right] = \\ = 256[\cos 4\pi + i \sin 4\pi] = 256(1 + 0i) = 256.$$

4. Для извлечения корня третьей степени запишем:

$$\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{-\sqrt{3} + 1} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{5\pi}{6} + 2\pi k}{3} \right).$$

При $k = 0,\ 1, 2$ получаем три значения корня:

$$k = 0 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt[3]{z_2})_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{18} + i \sin \frac{5\pi}{18} \right);$$

$$k = 1 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt[3]{z_2})_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{17\pi}{18} + i \sin \frac{17\pi}{18} \right);$$

$$k = 2 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt[3]{z_2})_3 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{29\pi}{18} + i \sin \frac{29\pi}{18} \right). \quad \blacktriangleleft$$

9.3. Показательная форма комплексного числа

Для связи тригонометрических и показательных функций используется обозначение, называемое *формулой Эйлера*:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Выполняя подстановку получим *показательную форму* записи комплексного числа:

$$z = re^{i\varphi}.$$

Отметим, что в показательной форме, так же как и в тригонометрической, легко проводить операции умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня из комплексных чисел.

9.3.1. Действия над комплексными числами в показательной форме

Пусть заданы два комплексных числа $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$.

1. *Произведение* комплексных чисел $z_1 z_2$:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}\,;$$

2. *Частное* комплексных чисел $\frac{z_1}{z_2}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}\,;$$

3. *Возведение в n-ую степень* комплексного числа z^n:

$$z^n = r^n e^{in\varphi}\,;$$

4. *Извлечение корня n-ой степени* из комплексного числа $\sqrt[n]{z}$:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \quad \text{где } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Пример 9.4. Представить в показательной форме комплексные числа $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = -\sqrt{3} + i$.

► Используя результаты предыдущего примера запишем: $|z_1| = r_1 = \sqrt{2}$, $|z_2| = r_2 = 2$, $\arg z_1 = \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, $\arg z_2 = \varphi_2 = \frac{5\pi}{6}$. Тогда комплексные числа z_1 и z_2 в показательной форме можно записать:

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}};$$

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}. \quad ◄$$

Пример 9.5. Найти комплексные корни многочлена третьей степени $2x^3 - x^2 + 18x - 9$, если известен его действительный корень $x_1 = \frac{1}{2}$.

► Для нахождения комплексных корней заданного многочлена вначале представим его в виде произведения квадратичного (Ax^2+Bx+C) и линейного $(x - x_1)$ сомножителей, а затем сгруппируем слагаемые в полученном выражении по степеням переменной x:

$$2x^3 - x^2 + 18x - 9 = \left(Ax^2 + Bx + C\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) =$$
$$= Ax^3 + \left(-\frac{A}{2} + B\right)x^2 + \left(-\frac{B}{2} + C\right)x - \frac{C}{2}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x получим следующую систему из четырёх алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} A = 2; \\ -\dfrac{A}{2} + B = -1; \\ -\dfrac{B}{2} + C = 18; \\ -\dfrac{C}{2} = -9, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = 2; \\ C = 18; \\ B = 0. \end{cases}$$

В результате получим разложение исходного многочлена на множители

$$2x^3 - x^2 + 18x - 9 = (2x^2 + 18)\left(x - \tfrac{1}{2}\right) = (x^2 + 9)(2x - 1),$$

для нахождения комплексных корней которого необходимо решить квадратное уравнение $x^2 + 9 = 0$. Переписывая это уравнение в виде $x^2 = -9$, получим $x_{2,3} = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i$. ◄

9.4. Контрольные вопросы

1. Какое число называется комплексным? комплексно-сопряжённым?
2. Что называется действительной и мнимой частями комплексного числа?
3. Что называется алгебраической формой комплексного числа?
4. Приведите формулы основных действий над комплексными числами в алгебраической форме.

5. Какова геометрическая интерпретация комплексных чисел?
6. Что называется модулем и аргументом комплексного числа?
7. Что называется тригонометрической формой записи комплексного числа?
8. Приведите формулы основных действий над комплексными числами в тригонометрической форме.
9. Связь между какими функциями устанавливает формула Эйлера?
10. Как связаны тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа?
11. Приведите формулы основных действий над комплексными числами в показательной форме.
12. В каком случае квадратное уравнение будет иметь комплексно-сопряжённые корни?
13. В каком случае кубическое уравнение будет иметь комплексно-сопряжённые корни?

Глава 10

Случайные события

Теория вероятностей представляет собой раздел математики, который занимается изучением закономерностей массовых случайных явлений, представленных в абстрактной форме.

В теории вероятностей рассматриваются лишь те события, которые при известных условиях могут либо наступать, либо не наступать; никакой третьей возможности для них не предполагается. В таких случаях говорят, что события подчиняются *закону исключённого третьего*.

С точки зрения теории вероятностей все события делятся на *невозможные*, *случайные* и *достоверные*. Достоверными или невозможными называют события, наступление или ненаступление которых можно считать известными фактами, а случайными — события, факт наступления которых всего лишь возможен. Для обозначения случайных событий в теории вероятностей обычно используют прописные буквы латинского или греческого алфавитов: A, B, ..., а для обозначения достоверных и невозможных событий — символы Ω и $\varnothing$.

Некоторые случайные события принято считать *единичными*, то есть неповторимыми в своей индивидуальности, в то время как другие являются *массовыми*. Именно массовые случайные события представляют собой один из базовых предметов изучения в теории вероятностей. Примерами таких событий служат попадание пули в цель при стрельбе по мишени, излучение фотона при прохождении электрического тока через p-n переход светодиодной лампы и тому подобное.

10.1. Вероятности случайных событий

10.1.1. Статистическое определение вероятности

Числовой характеристикой наблюдаемого при испытаниях массового случайного события A является его *относительная частота*:

$$w(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{m}{n},$$

где $n(A) = m$ — абсолютная частота случайного события A, соответствующая числу испытаний, в которых его появление было зарегистрировано; $n(\Omega) = n$ — абсолютная частота достоверного события Ω, соответствующая общему числу наблюдаемых испытаний.

Так как произвольное событие A является частным случаем (подмножеством) достоверного $A \subseteq \Omega$, то для их частот будет верно неравенство $0 \leqslant m \leqslant n$. Тогда для невозможного события $w(\varnothing) = 0$, для случайного события $0 < w(A) < 1$, а для достоверного события $w(\Omega) = 1$.

Если наблюдаемые испытания идентичны, то относительная частота массового случайного события A обладает устойчивостью, то есть варьируется в окрестности некоторого постоянного значения, называемого *вероятностью* случайного события $\mathbf{P}\{A\}$. Причём вариации эти будут тем меньше, чем больше число наблюдаемых испытаний n. В таких случаях принято говорить, что относительная частота случайного события A *сходится* к его вероятности $w(A) \to \mathbf{P}\{A\}$ при неограниченном увеличении числа испытаний $n \to \infty$.

Свойство устойчивости можно наблюдать при анализе относительных частот появлений «орла» в последовательности подбрасываний монеты, пример которой показан в таблице 10.1. В первой строке таблицы отображается количество проведённых испытаний n, во второй строке цифрами 1 и 0 отображается появление или непоявление случайного события H — выпадения «орла» при очередном броске монеты, а в третьей и четвёртой строках — абсолютные $n(H)$ и относительные $w(H)$ частоты появлений «орла» в указанной последовательности.

Таблица 10.1. Абсолютные $n(H)$ и относительные $w(H)$ частоты появлений «орла» H в последовательности до $n = 12$ подбрасываний монеты

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
H	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	...
$n(H)$	0	1	2	2	3	4	4	5	5	5	6	7	...
$w(H)$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{7}{12}$	...

Поведение относительной частоты появлений «орла» $w(H)$ для более длинной последовательности до $n = 55$ подбрасываний монеты показано на рис. 10.1. Горизонтальные штриховые линии соответствуют наименьшему $w(H) = 0$, среднему $w(H) = \frac{1}{2}$ и наибольшему $w(H) = 1$ уровням относительной частоты, а вертикальные штрихи над осью абсцисс — номерам испытаний n, в которых появление «орла» H наблюдалось. Нетрудно заметить, что с ростом числа испытаний $n \to \infty$ вариации относительной частоты сходятся к постоянному значению вероятности $w(H) \to \mathbf{P}\{H\} = \frac{1}{2}$.

Заметим, что относительная частота случайного события $w(A)$ яв-

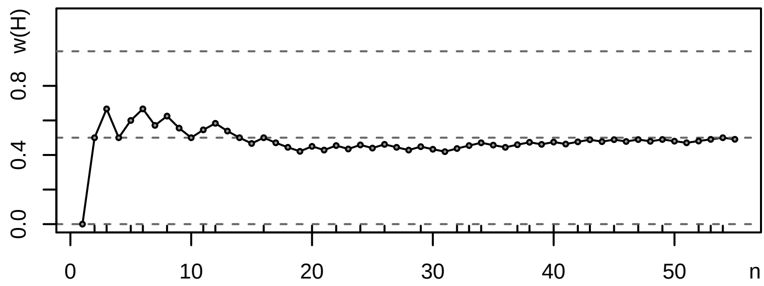


Рис. 10.1. Относительные частоты появлений «орла» $w(H)$ в последовательности до $n = 55$ подбрасываний монеты

ляется его *апостериорной* (то есть определяемой после проведения опыта) характеристикой, в то время как вероятность случайного события $\mathbf{P}\{A\}$ чаще всего является характеристикой *априорной* (то есть определяемой до проведения опыта).

10.1.2. Классическое определение вероятности

Классическое определение вероятности случайного события базируется на понятии группы *равновозможных* событий A_1, A_2, ..., A_n возникающих в том случае, когда нет объективных причин полагать, что при многократном повторении испытания какое-либо случайное событие A_k будет происходить чаще остальных.

Если при проведении одного испытания наступление события A не исключает наступления события B, то A и B называют *совместными*, а в противном случае события A и B называют *несовместными*.

События A_1, A_2, ..., A_n образуют *полную группу* в данном испытании, если они попарно несовместны и достоверно известно, что в результате испытания происходит только одно из них A_k. Если полная группа состоит всего из двух событий, то их называют *противоположными* и обозначают как A и $\overline{A}$.

Тогда в классическом понимании *вероятностью* случайного события A называют отношение:

$$\mathbf{P}\{A\} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{m}{n},$$

где $n(A) = m$ — число равновозможных элементарных событий, благоприятствующих появлению случайного события $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$; $n(\Omega) = n$ — общее число равновозможных элементарных событий, образующих полную группу $\Omega = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.

Так как произвольная группа элементарных событий A является подмножеством полной группы $A \subseteq \Omega$, то для их частот будет верно неравенство $0 \leqslant m \leqslant n$. Тогда для невозможного события $\mathbf{P}\{\varnothing\} = 0$, для произвольного случайного события $0 < \mathbf{P}\{A\} < 1$, а для достоверного события $\mathbf{P}\{\Omega\} = 1$.

Пример 10.1. Шестигранная игральная кость подбрасывается два раза. Найти вероятность случайного события $A = \{$«сумма выпавших очков будет больше четырёх, а их разность — равна нулю»$\}$.

► Обозначим буквами c и r числа очков, выпадающих при первом и втором подбрасываниях игральной кости.

Из текста условия следует, что искомое множество элементарных событий A, образуется как пересечение двух подмножеств: $A = A_+ \cap A_-$, где $A_+ = \{c + r > 4\}$ — сумма выпавших очков будет больше четырёх; $A_- = \{c - r = 0\}$ — разность выпавших очков будет равна нулю.

Тогда множество Ω можно представить в виде таблицы дробей $\frac{c+r}{c-r}$, числители которых будут соответствовать суммам выпавших очков, а знаменатели — их разностям.

$\frac{c+r}{c-r}$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{2}{0}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{7}{5}$
2	$\frac{3}{-1}$	$\frac{4}{0}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{4}$
3	$\frac{4}{-2}$	$\frac{5}{-1}$	$\frac{6}{0}$	$\frac{7}{1}$	$\frac{8}{2}$	$\frac{9}{3}$
4	$\frac{5}{-3}$	$\frac{6}{-2}$	$\frac{7}{-1}$	$\frac{8}{0}$	$\frac{9}{1}$	$\frac{10}{2}$
5	$\frac{6}{-4}$	$\frac{7}{-3}$	$\frac{8}{-2}$	$\frac{9}{-1}$	$\frac{10}{0}$	$\frac{11}{1}$
6	$\frac{7}{-5}$	$\frac{8}{-4}$	$\frac{9}{-3}$	$\frac{10}{-2}$	$\frac{11}{-1}$	$\frac{12}{0}$

Из составленной таблицы видно, что общее число равновозможных элементарных событий при двух подбрасываниях игральной кости будет равно $n = n(\Omega) = 6 \cdot 6 = 36$, а число элементарных событий, удовлетворяющих условиям A, будет равно $m = n(A) = 4$.

Тогда классическая оценка вероятности события A будет равна $\mathbf{P}\{A\} = \frac{m}{n} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. ◄

10.1.3. Геометрическое определение вероятности

В классическом определении вероятности множества равновозможных элементарных событий $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ и $\Omega = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ полагаются *дискретными*. Если же множества $A \subseteq \Omega$ *непрерывны*, то для априорной оценки вероятности $\mathbf{P}\{A\}$ вместо функций численности $n(A)$ и $n(\Omega)$ следует использовать одноимённые функции меры $\mathrm{mes}(A)$ и $\mathrm{mes}(\Omega)$

$$\mathbf{P}\{A\} = \frac{\mathrm{mes}(A)}{\mathrm{mes}(\Omega)} = \frac{m}{n},$$

где в качестве мер для ограниченных множеств $A \subseteq \Omega$, расположенных на прямой обычно используются их длины $l(A) = m$ и $l(\Omega) = n$, на плоскости — площади $s(A) = m$ и $s(\Omega) = n$, а в пространстве — объёмы $v(A) = m$ и $v(\Omega) = n$.

С геометрической точки зрения определённые таким способом отношения $\frac{m}{n}$ будет соответствовать вероятности $\mathbf{P}\{A\}$ того, что произвольная точка области Ω также будет принадлежать подобласти $A \subseteq \Omega$.

Пример 10.2. На отрезке числовой оси от 0 до 2 независимо друг от друга выбираются два произвольных числа. Найти вероятность того, что второе число будет не меньше половины от квадрата первого, но не больше его удвоенного значения.

► Обозначим выбираемые произвольные числа как x и y. Независимость выбора x и y означает, что множества $A \subset \Omega$ будут соответствовать областям декартовой прямоугольной системы координат Oxy, удовлетворяющим системам неравенств (см. рис. 10.2):

$$\Omega = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 2; 0 \leqslant y \leqslant 2\},$$
$$A = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 2; 0 \leqslant y \leqslant 2; \tfrac{x^2}{2} \leqslant y \leqslant 2x\}.$$

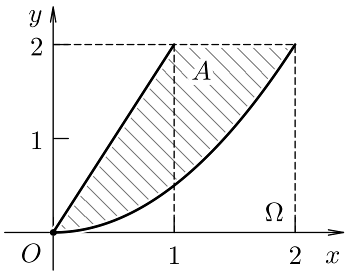


Рис. 10.2. Множества $A \subset \Omega$ в системе координат Oxy

Из рисунка видно, что площади искомых областей $n = s(\Omega) = 2^2 = 4$, $m = s(A) = s_1 - s_2$. В последнем равенстве $s_1 = \frac{1+2}{2} \cdot 2 = 3$ соответствует площади прямолинейной трапеции, ограниченной линиями: $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$, $y = 2x$, а s_2 — площади криволинейного треугольника, ограниченного линиями: $x = 2$, $y = 0$ и $y = \frac{x^2}{2}$:

$$s_2 = \int_0^2 \frac{x^2}{2}\,dx = \left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Тогда $m = s(A) = s_1 - s_2 = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$ и геометрическая оценка вероятности события A будет равна $\mathbf{P}\{A\} = \frac{m}{n} = \frac{5}{3\cdot 4} = \frac{5}{12}$. ◄

10.1.4. Элементы комбинаторики

При применении любого из вышеописанных определений вероятности для описания неэлементарных случайных событий используются правила и формулы *комбинаторики* — раздела математики, изучающего способы формирования и перечисления элементов множеств дискретных объектов: размещений, сочетаний и перестановок.

Пусть заданы k элементов конечного дискретного множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Тогда для них определены два базовых правила комбинаторики.

Правило «или» (сложения). Если элемент a_1 может быть выбран n_1 способами, элемент a_2 — n_2 способами, отличными от предыдущих n_1 способов, и так далее, а элемент a_k — n_k способами, отличными от предыдущих $n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-1}$ способов, то выбор одного из этих элементов: или a_1, или a_2, ..., или a_k возможен $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ способами.

Правило «и» (умножения). Если элемент a_1 может быть выбран n_1 способами и при любом таком выборе элемент a_2 может быть выбран n_2 способами и так далее, и при любом таком выборе элемент a_k может быть выбран n_k способами, то выбор всех этих элементов в указанном порядке: и a_1, и a_2, и ..., и a_k возможен $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Размещением из n элементов по k называется упорядоченное подмножество из k различных элементов, выбранных из некоторого множества n различных элементов. Число размещений из n элементов по k определяется неполным убывающим факториалом:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Частный случай размещения из n элементов по n называется *перестановкой* из n различных элементов. Тогда число перестановок для n элементов определяется полным убывающим факториалом:

$$P_n = A_n^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

Неупорядоченное размещение из n элементов по k называется их *сочетанием*. Тогда число сочетаний из n элементов по k определяется отношением числа размещений из n элементов по k к числу перестановок k, то есть отношением неполного убывающего факториала к полному:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdot\ldots\cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Для числа сочетаний C_n^k выполняются следующие *свойства*:

1. $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$, $C_n^k = C_n^{n-k}$;
2. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$;
3. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

Пример 10.3. Из урны, содержащей два белых шара и семь чёрных, наудачу извлекаются три шара. Найти вероятность того, что среди них есть два белых шара.

► Переформулируем искомое событие $A = \{$«подмножество из трёх шаров содержит два белых шара и один чёрный»$\}$.

Общее число равновозможных элементарных событий Ω будет соответствовать числу способов, которыми можно извлечь три шара из девяти с различным соотношением белых и чёрных шаров $n = C_9^3 = \frac{9!}{3!6!} = 84$, а число событий, отвечающее условию A, можно определить по комбинаторному правилу умножения $m = C_2^2 \cdot C_7^1 = 1\cdot 7 = 7$.

Тогда классическая оценка вероятности события A будет равна $\mathbf{P}\{A\} = \frac{m}{n} = \frac{7}{84} = \frac{1}{12}$. ◄

10.2. Модели случайных событий

Применение комбинаторики позволяет использовать классическое определение для вычисления вероятностей сложных случайных событий. В теории вероятностей аналогами комбинаторных правил сложения и умножения являются понятия суммы и произведения случайных событий.

Для иллюстрации свойств случайных событий используются диаграммы Эйлера–Венна, примеры которых показаны на рис. 10.3.

Суммой двух случайных событий $A_1 + A_2$ называется случайное событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий A_1 и/или A_2 (см. рис. 10.3, б).

Тогда *суммой* n случайных событий $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ называется случайное событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из событий-слагаемых.

В частности при сложении любого случайного события A с достоверным Ω, с самим собой A и с невозможным $\varnothing$ событиями будет верно, что

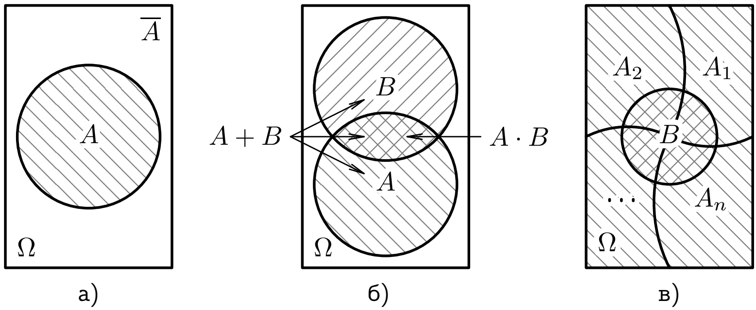


Рис. 10.3. Диаграммы Эйлера–Венна: а) противоположных случайных событий A и $\overline{A}$; б) суммы и произведения случайных событий A и B; в) произведения случайного события B с полной группой случайных событий A_1, A_2, ..., A_n

$$A + \Omega = \Omega, \quad A + A = A, \quad A + \varnothing = A.$$

Произведением двух случайных событий $A_1 \cdot A_2$ называется случайное событие, состоящее в совместном наступлении этих событий A_1 и A_2 (см. рис. 10.3, б).

Тогда *произведением* n случайных событий $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$ называется случайное событие, состоящее в совместном наступлении всех событий-сомножителей.

В частности при умножении любого случайного события A с достоверным Ω, с самим собой A и с невозможным $\varnothing$ событиями будет верно, что

$$A \cdot \Omega = A, \quad A \cdot A = A, \quad A \cdot \varnothing = \varnothing.$$

Используя операции сложения и умножения определение *полной группы* n случайных событий можно сформулировать следующим образом (см. на рис. 10.3, в):

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega, \quad \text{где} \quad A_i \cdot A_j = \varnothing \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

В частности при $n = 2$ из этого определения вытекают свойства *противоположных* случайных событий (см. на рис. 10.3, а):

$$A + \overline{A} = \Omega, \quad \text{где} \quad A \cdot \overline{A} = \varnothing.$$

10.2.1. Теоремы сложения и умножения вероятностей

Вероятность произведения двух *случайных* событий A_1 и A_2 равна произведению вероятности первого из этих событий на условную вероятность второго:

$$\mathbf{P}\{A_1A_2\} = \mathbf{P}\{A_1\} \cdot \mathbf{P}\{A_2|A_1\},$$

где $\mathbf{P}\{A_2|A_1\}$ соответствует вероятности события A_2, найденной при условии, что событие A_1 произошло.

Вероятность произведения n *случайных* событий A_1, A_2, ..., A_n будет равна произведению вероятности первого из этих событий на вероятности остальных, найденных при условии, что предшествующие им события произошли

$$\mathbf{P}\{A_1A_2\ldots A_n\} = \mathbf{P}\{A_1\}\mathbf{P}\{A_2|A_1\}\ldots\mathbf{P}\{A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1}\}.$$

Если вероятность наступления события A_2 не зависит от наступления события A_1, то её условная вероятность совпадает с безусловной $\mathbf{P}\{A_2|A_1\} = \mathbf{P}\{A_2\}$, а события A_1 и A_2 называют *независимыми*.

Вероятность произведения двух *независимых* событий A_1 и A_2 равна произведению вероятностей этих событий

$$\mathbf{P}\{A_1A_2\} = \mathbf{P}\{A_1\} \cdot \mathbf{P}\{A_2\}.$$

Вероятность произведения n *независимых в совокупности* событий A_1, A_2, ..., A_n будет равна произведению вероятностей этих событий

$$\mathbf{P}\{A_1A_2\ldots A_n\} = \mathbf{P}\{A_1\}\mathbf{P}\{A_2\}\ldots\mathbf{P}\{A_n\}.$$

Вероятность суммы двух *совместных* событий A_1 и A_2 равна сумме вероятностей этих событий, найденной без вероятности их произведения

$$\mathbf{P}\{A_1 + A_2\} = \mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\} - \mathbf{P}\{A_1A_2\}.$$

Тогда вероятность суммы n *совместных* событий A_1, A_2, ..., A_n будет равна сумме вероятностей этих событий, найденной без суммы вероятностей произведений их сочетаний из n по 2, найденной без суммы вероятностей произведений их сочетаний из n по 3, и так далее, найденной без вероятности произведения их сочетания из n по n:

$$\begin{gathered}
\mathbf{P}\{A_1 + A_2 + \ldots + A_n\} = \\
= (\mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\} + \ldots + \mathbf{P}\{A_n\} - \\
- (\mathbf{P}\{A_1A_2\} + \mathbf{P}\{A_1A_3\} + \ldots + \mathbf{P}\{A_{n-1}A_n\} - \\
- (\mathbf{P}\{A_1A_2A_3\} + \mathbf{P}\{A_1A_2A_4\} + \ldots + \mathbf{P}\{A_{n-2}A_{n-1}A_n\} - \\
- (\mathbf{P}\{A_1A_2\ldots A_n\})\ldots))).
\end{gathered}$$

Если события A_1 и A_2 *несовместны*, то их произведение будет невозможным событием, вероятность которого равна нулю $\mathbf{P}\{A_1A_2\} = 0$.

Вероятность суммы двух *несовместных* событий A_1 и A_2 равна сумме вероятностей этих событий

$$\mathbf{P}\{A_1 + A_2\} = \mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\}.$$

Тогда вероятность суммы n *попарно несовместных* событий A_1, A_2, …, A_n будет равна сумме вероятностей этих событий

$$\mathbf{P}\{A_1 + A_2 + \ldots + A_n\} = \mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\} + \ldots + \mathbf{P}\{A_n\}.$$

В частности вероятности сумм для *полных групп* n случайных и двух *противоположных* событий будут одинаковы и равны единице:

$$\mathbf{P}\{A_1 + A_2 + \ldots + A_n\} = \mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\} + \ldots + \mathbf{P}\{A_n\} = 1.$$
$$\mathbf{P}\{A + \overline{A}\} = \mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{\overline{A}\} = 1.$$

Пример 10.4. Из урны, содержащей два белых шара и семь чёрных, наудачу извлекаются три шара. Найти вероятности того, что: а) среди них есть два белых шара; б) среди них есть хотя бы один чёрный шар.

► Вначале переформулируем первое искомое событие: $A = \{$«подмножество из трёх шаров содержит два белых шара и один чёрный (не белый)»$\} = \{WW\overline{W} + W\overline{W}W + \overline{W}WW\}$, где события W и $\overline{W}$ соответствуют извлечениям из урны белого и не белого шаров.

Используя теоремы для вероятностей суммы несовместных и произведения зависимых событий, найдём вероятность события A:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{A\} &= \mathbf{P}\{WW\overline{W} + W\overline{W}W + \overline{W}WW\} = \\ &= \mathbf{P}\{WW\overline{W}\} + \mathbf{P}\{W\overline{W}W\} + \mathbf{P}\{\overline{W}WW\} = 3\mathbf{P}\{WW\overline{W}\} = \\ &= 3\mathbf{P}\{W\}\mathbf{P}\{W|W\}\mathbf{P}\{\overline{W}|WW\} = 3 \cdot \tfrac{2}{9} \cdot \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{7}{7} = \tfrac{3}{36} = \tfrac{1}{12},\end{aligned}$$

где $\mathbf{P}\{W\} = \frac{2}{9}$ — классическая оценка вероятности извлечения белого шара; $\mathbf{P}\{W|W\} = \frac{1}{8}$ — вероятность извлечения белого шара при условии, что ранее был извлечён белый шар; $\mathbf{P}\{\overline{W}|WW\} = \frac{7}{7}$ — вероятность извлечения не белого шара при условии, что ранее были извлечены два белых шара.

Теперь сформулируем событие, противоположное ко второму искомому: $\overline{B} = \{$«подмножество из трёх шаров не содержит ни одного белого»$\} = \{\overline{WWW}\}$.

Тогда, используя теоремы сложения вероятностей противоположных и умножения вероятностей зависимых событий, найдём вероятность события B:

$$\mathbf{P}\{B\} = 1 - \mathbf{P}\{\overline{B}\} = 1 - \mathbf{P}\{\overline{W}\overline{W}\overline{W}\} =$$
$$= 1 - \mathbf{P}\{\overline{W}\}\mathbf{P}\{\overline{W}|\overline{W}\}\mathbf{P}\{\overline{W}|\overline{W}\overline{W}\} =$$
$$= 1 - \tfrac{2}{9} \cdot \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{0}{7} = 1 - 0 = 1. \quad \blacktriangleleft$$

10.2.2. Полная вероятность и формула Байеса

Применение формул суммы и произведения вероятностей к *полной группе* случайных событий приводят к получению формулы полной вероятности и формулы Байеса.

Полная (средняя) вероятность. Если событие B может произойти лишь при условии появления одного из событий-гипотез A_1, A_2, …, A_n, образующих полную группу, то полная (или средняя) вероятность события A будет определяться формулой (см. на рис. 10.3, в)

$$\mathbf{P}\{B\} = \mathbf{P}\{A_1\}\mathbf{P}\{B|A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\}\mathbf{P}\{B|A_2\} + \ldots + \mathbf{P}\{A_n\}\mathbf{P}\{B|A_n\},$$

где $\mathbf{P}\{A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\} + \ldots + \mathbf{P}\{A_n\} = 1$, а $\mathbf{P}\{A_iA_j\} = 0$ при $i \neq j$.

Формула Байеса. При определении полной вероятности события B вероятности событий-гипотез $\mathbf{P}\{A_1\}$, $\mathbf{P}\{A_2\}$, …, $\mathbf{P}\{A_n\}$ были определены *априорно*. Однако, если событие B уже произошло (или не произошло), то условные вероятности гипотез $\mathbf{P}\{A_1|B\}$, $\mathbf{P}\{A_2|B\}$, …, $\mathbf{P}\{A_n|B\}$ могут быть *апостериорно* переоценены по формулам

$$\mathbf{P}\{A_k|B\} = \frac{\mathbf{P}\{A_k\}\mathbf{P}\{B|A_k\}}{\mathbf{P}\{B\}}, \quad \text{при} \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

Здесь $\mathbf{P}\{B\} = \mathbf{P}\{A_1\}\mathbf{P}\{B|A_1\} + \mathbf{P}\{A_2\}\mathbf{P}\{B|A_2\} + \ldots + \mathbf{P}\{A_n\}\mathbf{P}\{B|A_n\}$.

Пример 10.5. Отношение частот грузовых, пассажирских и специальных автомобилей, проходящих по шоссе мимо газозаправочной станции, составляет 2:6:1. Вероятность того, что заправка газом в этом месте шоссе потребуется для грузового автомобиля равна $\frac{2}{5}$, для пассажирского автомобиля— $\frac{1}{5}$, а для специального автомобиля— $\frac{3}{5}$. Если для заправки газом к станции подъехал автомобиль, то какова вероятность того, что им оказался специальный автомобиль.

► Вначале формализуем условие задачи: $\mathbf{P}\{H_1\} = \frac{2}{9}$, $\mathbf{P}\{H_2\} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, $\mathbf{P}\{H_3\} = \frac{1}{9}$, $\mathbf{P}\{A|H_1\} = \frac{2}{5}$, $\mathbf{P}\{A|H_2\} = \frac{1}{5}$, $\mathbf{P}\{A|H_3\} = \frac{3}{5}$, где использованы обозначения $H_{1|2|3} =$ {«мимо заправочной станции проехал грузовой | пассажирский | специальный автомобиль»}; $A|H_{1|2|3} =$ $=$ {«заправка газом потребуется грузовому | пассажирскому | специальному автомобилям»}; $A = \{$«заправка газом потребуется произвольному автомобилю»}; $H_3|A = \{$«для заправки газом к станции подъехал специальный автомобиль»}.

Используя теоремы о полной (средней) вероятности и формуле Байеса найдём оценки вероятностей событий A и $H_3|A$:

$$\mathbf{P}\{A\} = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{P}\{H_i\}\mathbf{P}\{A|H_i\} = \tfrac{2}{9} \cdot \tfrac{2}{5} + \tfrac{6}{9} \cdot \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{9} \cdot \tfrac{3}{5} = \tfrac{13}{45};$$

$$\mathbf{P}\{H_3|A\} = \frac{\mathbf{P}\{H_3\}\mathbf{P}\{A|H_3\}}{\mathbf{P}\{A\}} = \frac{\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{13}{45}} = \tfrac{3}{45} \cdot \tfrac{45}{13} = \tfrac{3}{13}.$$

Заметим, что усреднённая априорная и апостериорная оценки вероятностей случайных событий $\mathbf{P}\{A\}$ и $\mathbf{P}\{H_3|A\}$ будут удовлетворять неравенствам: $\mathbf{P}\{A\} = \frac{13}{45} > \frac{1}{5} = \mathbf{P}\{A|H_2\}$; $\mathbf{P}\{A\} = \frac{13}{45} < \frac{3}{5} = \mathbf{P}\{A|H_3\}$; $\mathbf{P}\{H_3|A\} = \frac{3}{13} > \frac{1}{9} = \mathbf{P}\{H_3\}$. ◄

10.2.3. Последовательные независимые испытания

Схема Бернулли является вероятностной моделью последовательности n *независимых* испытаний, для каждого из которых допускается один из двух возможных исходов A или $\overline{A}$, а условия испытаний сохраняются неизменными.

Независимость здесь означает, что вероятности событий A и $\overline{A}$ *постоянны* и не зависят от результатов предшествующих испытаний $\mathbf{P}\{A\} = p = \text{const}$, $\mathbf{P}\{\overline{A}\} = 1 - p = q = \text{const}$.

Тогда вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит ровно k раз вычисляется по *формуле Бернулли*:

$$\mathbf{P}_n\{k\} = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — число сочетаний из n элементов по k.

Формула Бернулли позволяет определить точные значения вероятности $\mathbf{P}_n\{k\}$, но при больших значениях n вычисление факториалов и степенных функций создаёт существенные технические сложности. В таких случаях используются сравнительно простые асимптотические формулы, определяемые локальной и интегральной теоремами Лапласа.

Локальная теорема Муавра–Лапласа. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит ровно k раз, удовлетворяет предельному равенству

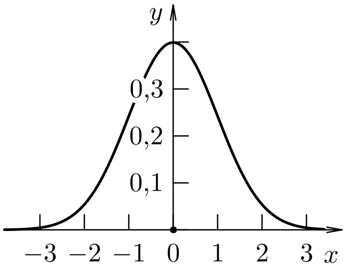


Рис. 10.4. График функции Гаусса $y = \varphi(x)$

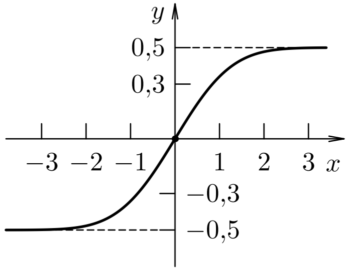


Рис. 10.5. График функции Лапласа $y = \Phi(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_n\{k\} = \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}$ — функция Гаусса (см. рис. 10.4).

В практических расчётах локальной *формулой Муавра–Лапласа* пользуются при условии, что $npq \geqslant 20$. Для упрощения вычислений обычно используется таблица значений функции Гаусса (см. приложение Б.14) и некоторые её свойства:

1. Функция Гаусса определена на всей числовой оси.
2. Функция Гаусса является чётной $\varphi(-x) = \varphi(x)$.
3. Функция Гаусса монотонно возрастает при $x < 0$ и монотонно убывает при $x > 0$ так, что $\varphi(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$; в практических расчётах обычно полагают, что $\varphi(x) \approx 0$ при $|x| > 4$.

Интегральная теорема Муавра–Лапласа. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит не менее k_1, но не более k_2 раз, удовлетворяет предельному равенству

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_n\{k_1 \leqslant k \leqslant k_2\} = \Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ — функция Лапласа (см. рис. 10.5).

В практических расчётах интегральной *формулой Муавра–Лапласа* пользуются при условии, что $npq \geqslant 20$. Для упрощения вычислений обычно используется таблица значений функции Лапласа (см. приложение Б.15) и некоторые её свойства:

1. Функция Лапласа определена на всей числовой оси.
2. Функция Лапласа является нечётной $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.
3. Функция Лапласа монотонно возрастает на всей числовой оси так, что $\Phi(x) \to -\frac{1}{2}$ при $x \to -\infty$ и $\Phi(x) \to \frac{1}{2}$ при $x \to \infty$; в практических расчётах обычно полагают, что $\Phi(x) \approx -0{,}5$ при $x < -4$ и $\Phi(x) \approx 0{,}5$ при $x > 4$.

Пример 10.6. Для пользователя сети Интернет известна вероятность p того, что его суточный трафик превысит установленное ограничение. Считая $p = \frac{1}{3} = \mathrm{const}$, найти вероятности того, что суточный трафик: а) в течение 7 дней будет превышать ограничение ровно 2 раза; б) в течение 7 дней будет превышать ограничение не более 2 раз; в) в течение 140 дней будет превышать ограничение ровно 45 раз; г) в течение 140 дней будет превышать ограничение не более 45 раз.

► Заданное условие описывает модель последовательных независимых испытаний с постоянными вероятностями: $\mathbf{P}\{A\} = p = \frac{1}{3}$ события $A = \{$«суточный трафик превысил установленное ограничение»$\}$; $\mathbf{P}\{\overline{A}\} = q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ события $\overline{A} = \{$«суточный трафик не превысил установленное ограничение»$\}$.

А. Вероятность того, что трафик пользователя в течение 7 дней будет превышать ограничение ровно 2 дня определяется формулой Бернулли:

$$\mathbf{P}_7\{2\} = C_7^2\left(\tfrac{1}{3}\right)^2\left(\tfrac{2}{3}\right)^5 = \tfrac{224}{729} \approx 0{,}307.$$

Б. Вероятность того, что трафик пользователя в течение 7 дней будет превышать ограничение не более 2 дней определяется суммой:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_7\{0 \leqslant k \leqslant 2\} &= \mathbf{P}_7\{0\} + \mathbf{P}_7\{1\} + \mathbf{P}_7\{2\} = \\ &= C_7^0\left(\tfrac{2}{3}\right)^7 + C_7^1\left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right)^6 + C_7^2\left(\tfrac{1}{3}\right)^2\left(\tfrac{2}{3}\right)^5 = \\ &= \tfrac{128}{2187} + \tfrac{448}{2187} + \tfrac{672}{2187} \approx 0{,}571.\end{aligned}$$

В. С учётом значения критерия $npq = 140 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 31{,}(1) > 20$ вероятность того, что трафик пользователя в течение 140 дней будет превышать ограничение ровно 45 дней с достаточной точностью определяется локальной формулой Муавра–Лапласа:

$$\mathbf{P}_{140}\{45\} = \frac{1}{\sqrt{31{,}(1)}}\,\varphi\left(\frac{45 - 140\cdot\frac{1}{3}}{\sqrt{31{,}(1)}}\right) \approx \frac{\varphi(-0{,}30)}{\sqrt{31{,}(1)}} \approx 0{,}068,$$

где значение функции Гаусса $\varphi(-0{,}30) = \varphi(0{,}30) \approx 0{,}068$ указано в приложении Б.14.

Г. С учётом значения критерия $npq = 31{,}(1) > 20$ вероятность того, что трафик пользователя в течение 140 дней будет превышать ограничение не более 45 дней с достаточной точностью определяется интегральной формулой Муавра–Лапласа:

$$\mathbf{P}_{140}\{0 \leqslant k \leqslant 45\} = \Phi\left(\frac{45-140\cdot\frac{2}{3}}{\sqrt{31{,}(1)}}\right) - \Phi\left(\frac{0-140\cdot\frac{2}{3}}{\sqrt{31{,}(1)}}\right) \approx$$
$$\approx \Phi(-0{,}30) - \Phi(-8{,}37) \approx 0{,}383,$$

где значение функции Лапласа $\Phi(-0{,}30) = -\Phi(0{,}30) \approx -0{,}117$ указано в приложении Б.15, а значение $\Phi(-8{,}37) \approx -0{,}5$ соответствует её нижнему пределу. ◀

10.3. Контрольные вопросы

1. Что называется случайным событием? Какие события называются достоверными Ω, невозможными $\varnothing$, совместными, несовместными и противоположными?
2. Что называется относительной частотой наблюдаемого события $w(A)$? Сформулируйте статистическое определение вероятности случайного события $\mathbf{P}\{A\}$.
3. Сформулируйте классическое и геометрическое определения вероятности случайного события $\mathbf{P}\{A\}$.
4. Какие множества называются перестановками из n элементов и размещениями из n элементов по k? Как связаны между собой численности перестановок P_n и размещений A_n^k?
5. Какие множества называются сочетаниями из n элементов по k? Как связаны между собой численности сочетаний C_n^k, перестановок P_k и размещений A_n^k?
6. Сформулируйте определения суммы $A + B + C$ и произведения ABC трёх случайных событий A, B, C.
7. Как определяются вероятности суммы $\mathbf{P}\{A + B + C\}$ для совместных и несовместных случайных событий A, B, C?
8. Как определяются вероятности произведения $\mathbf{P}\{ABC\}$ для зависимых и независимых случайных событий A, B, C?
9. Сформулируйте теорему о вероятности случайного события $\mathbf{P}\{B\}$, зависимого от полной группы событий-гипотез $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
10. Сформулируйте теорему об апостериорной оценке вероятности по формуле Байеса $\mathbf{P}\{A_k|B\}$.

11. Как определяется вероятность $\mathbf{P}_n\{k\}$ того, что в n независимых испытаниях событие A наступит ровно k раз?
12. Как определяется вероятность $\mathbf{P}_n\{k \geqslant k_1\}$ того, что в n независимых испытаниях событие A наступит не менее k_1 раз?
13. Как определяется вероятность $\mathbf{P}_n\{k \leqslant k_2\}$ того, что в n независимых испытаниях событие A наступит не более k_2 раз?

Глава 11

Случайные величины

Стремление оценивать факты с помощью числовых значений является характерной чертой для подавляющего большинства точных наук. Однако, если наблюдаемые факты связаны со случайными явлениями, то способность наблюдателя предугадывать какое именно из множества значений примет наблюдаемая величина утрачивается. *Случайной* называют переменную величину, принимающую в результате некоторого испытания одно из множества возможных значений.

В зависимости от свойств множества возможных значений обычно выделяют *дискретные* и *непрерывные* случайные величины. Случайная величина дискретного типа может принимать лишь отдельные изолированные значения, а случайная величина непрерывного типа — все значения из некоторой области.

Для обозначения случайных величин в теории вероятностей обычно используют прописные буквы латинского или греческого алфавитов: X, Y, $\ldots$, а для обозначения их возможных значений — соответствующие строчные буквы: x, y, $\ldots$

11.1. Характеристики случайных величин

Законом распределения некоторой случайной величины называют всякое соотношение, позволяющее установить связь между возможными значениями этой величины и вероятностями их появления. Законы распределения для дискретных случайных величин обычно представляются в матричной, а для непрерывных случайных величин — в аналитической формах.

Матричная запись закона (ряда) распределения дискретной случайной величины X имеет вид

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix},$$

где x_1, x_2, $\ldots$, x_n — возможные значения X; $p_1 = \mathbf{P}\{X = x_1\}$, $p_2 = \mathbf{P}\{X = x_2\}$, $\ldots$, $p_n = \mathbf{P}\{X = x_n\}$ — вероятности появления возможных значений X. Нетрудно заметить, что поскольку случайные события $X = x_i$ при $i = 1, 2, \ldots, n$ образуют полную группу, то для любого закона распределения дискретной случайной величины X будет верно, что

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \quad \text{и в частности} \quad \sum_{\alpha < x_i \leqslant \beta} p_i = \mathbf{P}\{\alpha < X \leqslant \beta\},$$

где запись $\alpha < x_i \leqslant \beta$ означает выборку индексов тех значений x_i, которые удовлетворяют данному условию.

Используя одностороннее неравенство $X \leqslant x$ можно получить выражение для *функции распределения* $F(x)$ дискретной случайной величины

$$F(x) = \mathbf{P}\{X \leqslant x\} = \sum_{x_i \leqslant x} p_i,$$

где запись $x_i \leqslant x$ означает выборку индексов тех значений x_i, которые удовлетворяют данному условию.

Из данного определения вытекают *свойства функции распределения* $F(x)$ произвольной случайной величины X:

1. Неубывание функции: если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \geqslant F(x_1)$.
2. Ограниченность функции: $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$ при $-\infty < x < \infty$.
3. Предельные значения функции:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0; \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

4. Вероятностная интерпретация функции:

$$\mathbf{P}\{\alpha < X \leqslant \beta\} = F(x)\Big|_{\alpha}^{\beta}.$$

Для непрерывной случайной величины X матричная запись закона распределения уже невозможна, поскольку множество возможных значений $x \in X$ не является счётным, а вероятности отдельных изолированных значений $\mathbf{P}\{X = x\} = 0$ являются бесконечно малыми величинами. В этом случае для записи закона распределения случайной величины X используется функция плотности вероятности $f(x)$, определяемая предельным равенством

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{P}\{x \leqslant X < x + \Delta x\}}{\Delta x}.$$

Из этого определения следует, что с точностью до бесконечно малых высшего порядка произведение $f(x)\Delta x$ будет соответствовать вероятности того, что случайная величина X примет значение, заключённое между x и $x + \Delta x$.

Из данного определения вытекают *свойства функции плотности вероятности* $f(x)$ непрерывной случайной величины X:

1. Неотрицательность функции: $f(x) \geqslant 0$.
2. Вероятностная интерпретация функции:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \mathbf{P}\{\alpha < X \leqslant \beta\}, \quad \text{и в пределе} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

3. Связь с функцией распределения:

$$F(x) = \mathbf{P}\{X \leqslant x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \Rightarrow \quad F'(x) = f(x).$$

При изучении случайных величин, встречающихся в прикладных задачах техники, информатики и естественных наук, часто возникает необходимость вычисления *среднего наблюдаемого значения* $\overline{x}$ случайной величины X, апостериорная оценка которого определяется формулой:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i w_i,$$

где $x_i m_i$ — произведения наблюдаемых значений x_i на абсолютные частоты m_i их появления; $w_i = \frac{m_i}{m_1+m_2+\ldots+m_k}$ — относительные частоты появления наблюдаемых значений x_i.

Априорная оценка $\overline{x}$ называется *математическим ожиданием случайной величины* $\mathbf{M}X$, которое в дискретном случае определяется с помощью суммирования произведений $x_i p_i$, а в непрерывном — с помощью интегрирования $xf(x)dx$:

$$\mathbf{M}X = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \qquad \mathbf{M}X = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Свойства математического ожидания $\mathbf{M}X$:

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной: $\mathbf{M}C = C$, где $C = \text{const}$.
2. Постоянный множитель выносится за знак математического ожидания: $\mathbf{M}(CX) = C\mathbf{M}X$, где $C = \text{const}$.
3. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий $\mathbf{M}(X+Y) = \mathbf{M}X + \mathbf{M}Y$.
4. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий $\mathbf{M}(X \cdot Y) = \mathbf{M}X \cdot \mathbf{M}Y$.

5. Математическое ожидание отклонения случайной величины от её математического ожидания равно нулю $\mathbf{M}(X - \mathbf{M}X) = 0$.

Для апостериорной оценки среднего отклонения значений случайной величины X от своего среднего наблюдаемого значения $\overline{x}$ в прикладных исследованиях обычно используется понятие *среднего квадратического отклонения* s_x, квадрат которого соответствует *дисперсии наблюдаемых значений* s_x^2:

$$s_x^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \overline{x})^2 w_i,$$

где $(x_i - \overline{x})^2 m_i$ — произведения квадратов отклонений значений x_i от среднего наблюдаемого значения $\overline{x}$ на абсолютные частоты m_i их появления; $w_i = \frac{m_i}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}$ — относительные частоты появления наблюдаемых значений x_i.

Априорная оценка s_x^2 называется *дисперсией случайной величины* $\sigma_X^2 = \mathbf{D}X$, которая в дискретном случае определяется с помощью суммирования произведений $(x_i - \mathbf{M}X)^2 p_i$, а в непрерывном — с помощью интегрирования $(x - \mathbf{M}X)^2 f(x)dx$:

$$\mathbf{D}X = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathbf{M}X)^2 p_i, \qquad \mathbf{D}X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbf{M}X)^2 f(x)dx.$$

Свойства дисперсии $\mathbf{D}X$:

1. Дисперсия случайной величины неотрицательна $\mathbf{D}X \geqslant 0$.
2. Дисперсия постоянной равна нулю: $\mathbf{D}C = 0$, где $C = \mathrm{const}$.
3. Постоянный множитель выносится за знак дисперсии с возведением в квадрат: $\mathbf{D}(CX) = C^2\mathbf{D}X$, где $C = \mathrm{const}$.
4. Дисперсия суммы независимых случайных величин X и Y равна сумме их дисперсий $\mathbf{D}(X + Y) = \mathbf{D}X + \mathbf{D}Y$.
5. Универсальная формула дисперсии $\mathbf{D}X = \mathbf{M}(X^2) - (\mathbf{M}X)^2$.

Среднее квадратическое отклонение случайной величины X определяется как квадратный корень из дисперсии и обозначается σ_X.

Случайную величину V называют *центрированной*, если её математическое ожидание равно нулю $\mathbf{M}V = 0$. Для центрирования произвольной случайной величины X служит формула $V = X - \mathbf{M}X$.

Случайную величину W называют *нормированной*, если её дисперсия равна единице $\mathbf{D}W = 1$. Для нормирования произвольной случайной величины X служит формула $W = \frac{X}{\sigma_X}$.

Случайную величину Z называют *стандартной*, если её математическое ожидание равно нулю $\mathbf{M}Z = 0$, а дисперсия равна единице $\mathbf{D}Z = 1$. Для стандартизации произвольной случайной величины X служит формула $Z = \frac{X - \mathbf{M}X}{\sigma_X}$.

Медианой $x_{\frac{1}{2}}$ называется такое значение случайной величины X, которое делит область её возможных значений на две равновероятные части. Формально, медиана непрерывной случайной величины определяется как решение уравнения $F(x_{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}$.

Обобщая данное уравнение, приходим к понятию *квантиля* x_p *уровня* p: $F(x_p) = p$. С геометрической точки зрения квантиль x_p непрерывной случайной величины есть такая точка на оси абсцисс, что площадь криволинейной трапеции, ограниченная графиком плотности распределения $f(x)$ и лежащая левее вертикальной прямой $x = x_p$, будет равна p. С другой стороны, квантиль x_p по определению является корнем уравнения $F(x_p) = p$, откуда следует, что квантиль — это абсцисса $x = x_p$ точки пересечения прямой $y = p$ с графиком функции распределения $F(x)$.

Пример 11.1. Указаны законы распределения двух независимых дискретных случайных величин X и Y:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ p_1 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{pmatrix}, \qquad Y \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & p_3 \end{pmatrix}.$$

Требуется составить закон распределения и найти числовые характеристики $\mathbf{M}T$, $\mathbf{D}T$ и $\mathbf{P}\{0 < T \leqslant 1\}$ случайной величины $T = \frac{X}{3} - 2Y$.

► Недостающие значения вероятностей p_1 и p_3 в законах распределения случайных величин X и Y определим по свойству нормировки:

$$p_1 = 1 - 0{,}3 - 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}4; \qquad p_3 = 1 - 0{,}2 - 0{,}3 = 0{,}5.$$

Составим закон распределения случайной величины $T = \frac{X}{3} - 2Y$ и с его помощью найдём математическое ожидание $\mathbf{M}X$ и дисперсию $\mathbf{D}X = \mathbf{M}(X^2) - (\mathbf{M}X)^2$:

$$T \sim \left(\begin{array}{c|ccc} \frac{x_i/3 - 2y_j}{p_i \cdot p_j} & \frac{-2}{0{,}2} & \frac{-1}{0{,}3} & \frac{0}{0{,}5} \\ \hline \frac{0}{0{,}4} & \frac{4}{0{,}08} & \frac{2}{0{,}12} & \frac{0}{0{,}20} \\ \frac{1}{0{,}3} & \frac{4{,}(3)}{0{,}06} & \frac{2{,}(3)}{0{,}09} & \frac{0{,}(3)}{0{,}15} \\ \frac{2}{0{,}2} & \frac{4{,}(6)}{0{,}04} & \frac{2{,}(6)}{0{,}06} & \frac{0{,}(6)}{0{,}10} \\ \frac{3}{0{,}1} & \frac{5}{0{,}02} & \frac{3}{0{,}03} & \frac{1}{0{,}05} \end{array}\right);$$

$$\mathbf{M}T = 4 \cdot 0{,}08 + 2 \cdot 0{,}12 + \ldots + 1 \cdot 0{,}05 \approx 1{,}733;$$
$$\mathbf{M}(T^2) = 4^2 \cdot 0{,}08 + 2^2 \cdot 0{,}12 + \ldots + 1^2 \cdot 0{,}05 \approx 5{,}555;$$
$$\mathbf{D}T = 5{,}555 - 1{,}733^2 \approx 2{,}552.$$

Вероятность попадания значений случайной величины T в заданный интервал соответствует сумме вероятностей её возможных значений t_{ij} из этого интервала:

$$\mathbf{P}\{0 < T \leqslant 1\} = \sum_{0<t_{ij}\leqslant 1} p_{ij} = 0{,}15 + 0{,}1 + 0{,}05 = 0{,}3,$$

где запись $0 < t_{ij} \leqslant 1$ означает выборку индексов тех значений t_{ij}, которые попадают в заданный интервал.

Теперь, используя свойства математического ожидания и дисперсии, выразим характеристики случайной величины T через соответствующие характеристики случайных величин X и Y:

$$\mathbf{M}T = \mathbf{M}(\tfrac{X}{3} - 2Y) = \tfrac{\mathbf{M}X}{3} - 2\mathbf{M}Y;$$
$$\mathbf{D}T = \mathbf{D}(\tfrac{X}{3} - 2Y) = \tfrac{\mathbf{D}X}{9} + 4\mathbf{D}Y.$$

Найдём числовые случайных величин X и Y:

$$\mathbf{M}X = 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}1 = 1;$$
$$\mathbf{M}Y = -2 \cdot 0{,}2 - 1 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}5 = -0{,}7;$$
$$\mathbf{M}X^2 = 0^2 \cdot 0{,}4 + 1^2 \cdot 0{,}3 + 2^2 \cdot 0{,}2 + 3^2 \cdot 0{,}1 = 2;$$
$$\mathbf{M}Y^2 = (-2)^2 \cdot 0{,}2 + (-1)^2 \cdot 0{,}3 + 0^2 \cdot 0{,}5 = 1{,}1;$$
$$\mathbf{D}X = 2 - 1^2 = 1; \qquad \mathbf{D}Y = 1{,}1 - (-0{,}7)^2 = 0{,}61.$$

Теперь вычислим математическое ожидание и дисперсию случайной величины T и сопоставим эти значения с ранее полученными:

$$\mathbf{M}T = \tfrac{1}{3} + 2 \cdot 0{,}7 \approx 1{,}7(3) \gtrapprox 1{,}733;$$
$$\mathbf{D}T = \tfrac{1}{9} + 4 \cdot 0{,}61 \approx 2{,}55(1) \lessapprox 2{,}552.$$

Сопоставление значений $\mathbf{M}T$ и $\mathbf{D}T$, найденных различными способами показывает, что полученные вторым способом значения $\mathbf{M}T$ и $\mathbf{D}T$ содержат меньшую вычислительную ошибку, то есть вторая методика расчёта более экономична. ◀

Пример 11.2. Указана функция распределения непрерывной случайной величины X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - (x-1)^2, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

Требуется найти функцию плотности вероятности $f(x)$ случайной величины X и её числовые характеристики: $\mathbf{M}X$, $\mathbf{D}X$, $\mathbf{P}\{\frac{1}{2} < X \leqslant \frac{3}{2}\}$ и $x_{\frac{1}{2}}$. Все полученные результаты проиллюстрировать графически.

► Используя соотношение $f(x) = F'(x)$ найдём функцию плотности вероятности случайной величины X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 2(1-x), & 0 \leqslant x < 1; \\ 0, & x \geqslant 1. \end{cases}$$

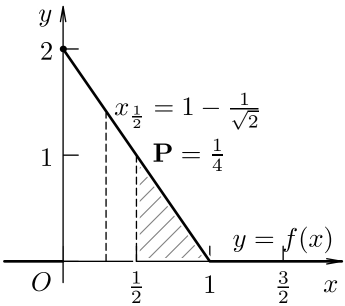


Рис. 11.1. Плотность вероятности $f(x)$ непрерывной случайной величины X

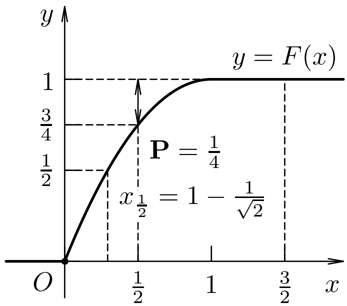


Рис. 11.2. Функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X

Графики функций плотности вероятности $f(x)$ и распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X показаны на рис. 11.1 и 11.2.

Теперь вычислим математические ожидание $\mathbf{M}X$ и дисперсию $\mathbf{D}X = \mathbf{M}(X^2) - (\mathbf{M}X)^2$ случайной величины X:

$$\mathbf{M}X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int\limits_{0}^{1} 2x(1-x)dx = \left(x^2 - \tfrac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 1 - \tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{3}.$$

$$\mathbf{D}X = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (\mathbf{M}X)^2 = \int\limits_{0}^{1} 2x^2(1-x)dx - (\tfrac{1}{3})^2 =$$

$$= \left(\tfrac{2x^3}{3} - \tfrac{x^4}{2}\right)\Big|_0^1 - \tfrac{1}{9} = \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{9} = \tfrac{11}{36}.$$

Используя функции плотности вероятности $f(x)$ и распределения $F(x)$ случайной величины X, найдём вероятность попадания её значений в заданный интервал:

$$\mathbf{P}\{\tfrac{1}{2} < X \leqslant \frac{3}{2}\} = \int\limits_{1/2}^{3/2} f(x)dx = F(x)\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} =$$

$$= F(\tfrac{3}{2}) - F(\tfrac{1}{2}) = 1 - 1 + (\tfrac{1}{2} - 1)^2 = \tfrac{1}{4}.$$

Иллюстрация полученного результата показана на рис. 11.1 и 11.2.

Используя функцию распределения $F(x)$ случайной величины X, составим уравнение для нахождения медианы $x_{\frac{1}{2}}$ и решим его:

$$F(x_{\frac{1}{2}}) = \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 - (x_{\frac{1}{2}} - 1)^2 = \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_{\frac{1}{2}} - 1 = \pm\tfrac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad x_{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}} \in [0, 1).$$

Иллюстрация полученного результата показана на рис. 11.1 и 11.2.

11.2. Модели дискретных случайных величин

11.2.1. Биномиальное распределение

Дискретная случайная величина $X \sim \mathbf{B}(n, p)$ имеет *биномиальное распределение* с параметрами $n \in \mathbf{N}$ и $p \in (0, 1)$, если она принимает целочисленные значения $k = 0, 1, \ldots, n$ с вероятностями, определяемыми формулой Бернулли:

$$p_k = \mathbf{P}\{X = k\} = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ — биномиальные коэффициенты; $p = \mathbf{P}\{A\}$ — вероятность успеха A в единичном испытании; $q = 1 - p = \mathbf{P}\{\overline{A}\}$ — вероятность неуспеха $\overline{A}$ в единичном испытании по схеме Бернулли.

Биномиальное распределение возникает в последовательности из n независимых испытаний с постоянной вероятностью успеха в каждом испытании $p = \mathrm{const}$ и полностью определяется значениями параметров n и p:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & k & \ldots & n \\ q^n & C_n^1 p^1 q^{n-1} & \ldots & C_n^k p^k q^{n-k} & \ldots & p^n \end{pmatrix}.$$

Функция распределения случайной величины, подчиняющейся биномиальному закону $X \sim \mathbf{B}(n,p)$, имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0; \\ \sum\limits_{k<x} C_n^k p^k q^{n-k}, & \text{если } 0 < x \leqslant n; \\ 1, & \text{если } x > n. \end{cases} \tag{11.1}$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, подчиняющейся биномиальному закону $X \sim \mathbf{B}(n,p)$, вычисляются по формулам:

$$\mathbf{M}X = np, \qquad \mathbf{D}X = npq. \tag{11.2}$$

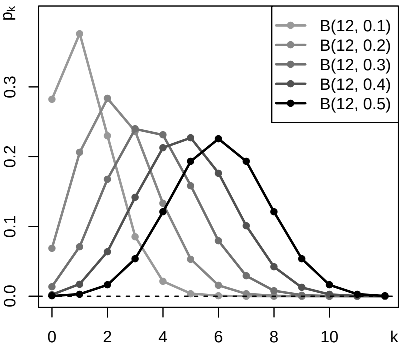


Рис. 11.3. Биномиальное распределение вероятностей p_k

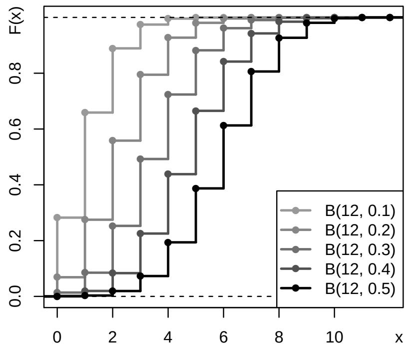


Рис. 11.4. Функция биномиального распределения $F(x)$

На рис. 11.3 и 11.4 показаны примеры построения графиков вероятностей p_k и функции распределения $F(x)$ биномиально распределённой случайной величины $X \sim \mathbf{B}(n,p)$ при $n = 12$ и $p = \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, \frac{5}{10}$.

Пример 11.3. Найти вероятность $\mathbf{P}\{X \leqslant 2\}$ для биномиально распределённой случайной величины $X \sim \mathbf{B}(n,p)$, если $\mathbf{M}X = 2$, а $\mathbf{D}X = \frac{4}{3}$.

► По условию для случайной величины $X \sim \mathbf{B}(n,p)$ будет верно:

$$\begin{cases} np = 2; \\ npq = \frac{4}{3}; \\ 1 - p = q, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} np = 2; \\ p = 1 - q; \\ 2q = \frac{4}{3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 6; \\ p = \frac{1}{3}; \\ q = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Тогда искомая вероятность для $X \sim \mathbf{B}(6, \frac{1}{3})$ будет равна:

$$\mathbf{P}\{X \leqslant 2\} = \sum_{k=0}^{2} C_6^k \left(\tfrac{1}{3}\right)^k \left(\tfrac{2}{3}\right)^{6-k} =$$
$$= C_6^0 \left(\tfrac{2}{3}\right)^6 + C_6^1 \left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right)^5 + C_6^2 \left(\tfrac{1}{3}\right)^2\left(\tfrac{2}{3}\right)^4 = \tfrac{496}{729} \approx 0{,}680. \ ◄$$

11.2.2. Распределение Пуассона

Дискретная случайная величина $X \sim \mathbf{P}(\lambda)$ имеет *распределение Пуассона* с параметром $\lambda > 0$, если она принимает целочисленные значения $k = 0, 1, \ldots, \infty$ с вероятностями, определяемыми формулой Пуассона

$$p_k = \mathbf{P}\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где показатель Пуассона $\lambda > 0$.

Распределение Пуассона является предельным случаем биномиального распределения при $n \to \infty$, а $p \to 0$ так, что $\lambda = np = \mathrm{const}$. Оно возникает при рассмотрении единичных независимых случайных событий с постоянной интенсивностью λ и полностью определяется её значением

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots \\ \frac{1}{e^{\lambda}} & \frac{\lambda^1}{e^{\lambda} 1!} & \frac{\lambda^2}{e^{\lambda} 2!} & \ldots \end{pmatrix}.$$

Функция распределения случайной величины, подчиняющейся закону Пуассона $X \sim \mathbf{P}(\lambda)$, имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0; \\ \sum\limits_{k<x} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, подчиняющейся закону Пуассона $X \sim \mathbf{P}(\lambda)$, вычисляются по формулам:

$$\mathbf{M}X = \mathbf{D}X = \lambda = np.$$

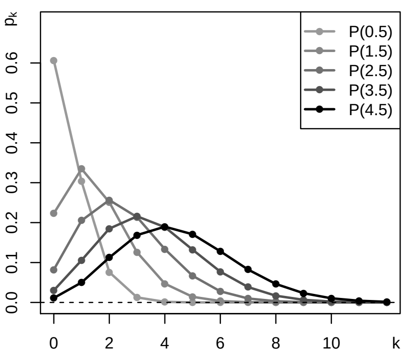


Рис. 11.5. Пуассоновское распределение вероятностей p_k

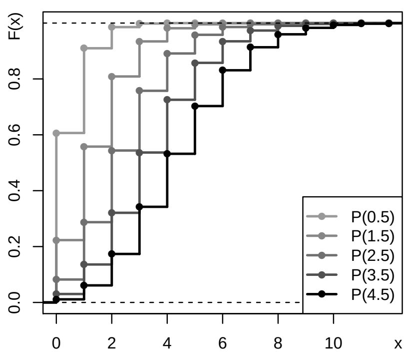


Рис. 11.6. Функция пуассоновского распределения $F(x)$

На рис. 11.5 и 11.6 показаны примеры построения графиков вероятностей p_k и функции распределения $F(x)$ пуассоновской случайной величины $X \sim \mathbf{P}(\lambda)$ при $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{9}{2}$.

Пример 11.4. Найти вероятность $\mathbf{P}\{X \leqslant 3\}$ для пуассоновски распределённой случайной величины $X \sim \mathbf{P}(\lambda)$, если $\mathbf{P}\{X = 0\} = e^{-2}$.

► По условию для случайной величины $X \sim \mathbf{P}(\lambda)$ будет верно:

$$\mathbf{P}\{X = 0\} = \frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda} = e^{-2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2.$$

Тогда искомая вероятность для $X \sim \mathbf{P}(2)$ будет равна:

$$\mathbf{P}\{X \leqslant 3\} = \sum_{k=0}^{3} \frac{2^k}{k!}e^{-2} =$$
$$= \frac{1}{e^2}\left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}\right) = \frac{19}{3e^2} \approx 0{,}857. \text{ ◄}$$

11.2.3. Геометрическое распределение

Дискретная случайная величина X имеет *геометрическое распределение* с параметром p: $X \sim \mathbf{G}(p)$, если она принимает целочисленные значения $k = 0, 1, \ldots, \infty$ с вероятностями, определяемыми формулой

$$p_k = \mathbf{P}\{X = k\} = q^k p,$$

где $p \in (0{,}1)$; $q = 1 - p$.

Геометрическое распределение имеет случайная величина X, равная числу испытаний в последовательности Бернулли, проходящих до появления первого успеха. Геометрическое распределение полностью определяется значениями параметра p:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots \\ p & qp & q^2 p & \ldots \end{pmatrix}.$$

Функция распределения случайной величины X, подчиняющейся геометрическому закону $X \sim \mathbf{G}(p)$, имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0; \\ \sum\limits_{k<x} q^k p, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

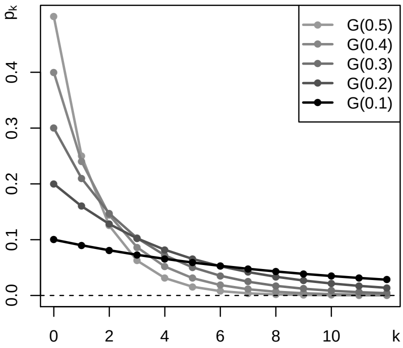


Рис. 11.7. Геометрическое распределение вероятностей p_k

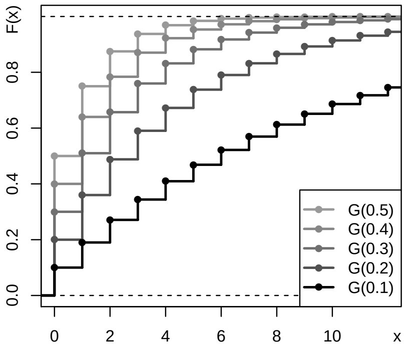


Рис. 11.8. Функция геометрического распределения $F(x)$

Основным свойством геометрического распределения является отсутствие последействия, которое выражается вероятностным соотношением $\mathbf{P}\{X > \alpha+\beta \mid X > \alpha\} = \mathbf{P}\{X > \beta\}$ и может быть интерпретировано как утверждение о том, что количество неуспехов в прошлом не влияет на количество неуспехов в будущем.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X, подчиняющейся геометрическому закону $X \sim \mathbf{G}(p)$, вычисляются по формулам:

$$\mathbf{M}X = \frac{1}{p}, \quad \mathbf{D}X = \frac{q}{p^2}.$$

На рис. 11.7 и 11.8 показаны примеры построения графиков вероятностей p_k и функции распределения $F(x)$ геометрически распределённой случайной величины $X \sim \mathbf{G}(p)$ при $p = \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, \frac{5}{10}$.

Пример 11.5. Найти вероятность $\mathbf{P}\{X \leqslant 4\}$ для геометрически распределённой случайной величины $X \sim \mathbf{G}(p)$, если $\mathbf{D}X = 2$.

► По условию для случайной величины $X \sim \mathbf{G}(p)$ будет верно, что $\mathbf{D}X = \frac{q}{p^2} = 2$, где $q = 1 - p$.

Записанные выражения эквивалентны квадратному уравнению вида $2p^2 + p - 1 = 0$, дискриминант которого $D = 1 + 8 = 9 > 0$, а неотрицательный корень соответствует параметру геометрического распределения $p = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} = q$.

Тогда искомая вероятность для $X \sim \mathbf{G}(\frac{1}{2})$ будет равна:

$$\mathbf{P}\{X \leqslant 4\} = \sum_{k=0}^{4} \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2^2} + \tfrac{1}{2^3} + \tfrac{1}{2^4} + \tfrac{1}{2^5} = \tfrac{31}{32} \approx 0{,}969. \ ◄$$

11.3. Модели непрерывных случайных величин

11.3.1. Равномерное распределение

Простейшим из непрерывных распределений является равномерное распределение, возникающее при обобщении понятия n равновероятных случайных событий на случай $n \to \infty$. Непрерывная случайная величина $X \sim \mathbf{U}(a, b)$ имеет *равномерное распределение* на отрезке $[a, b]$, если её плотность вероятности постоянна и отлична от нуля только на этом отрезке:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin [a,b]; \\ \frac{1}{b-a}, & \text{если } x \in [a,b]. \end{cases}$$

Равномерное распределение полностью определяется координатами концов отрезка $[a, b]$ и с геометрической точки зрения случайная величина $X \sim \mathbf{U}(a, b)$ соответствует координате точки, наудачу выбранной на этом отрезке.

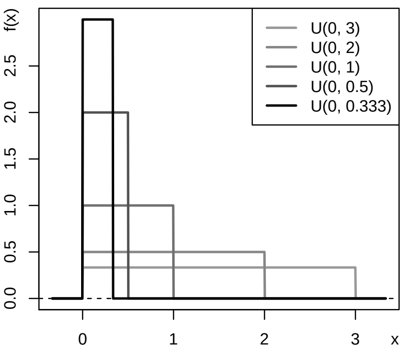


Рис. 11.9. Плотность равномерного распределения $f(x)$

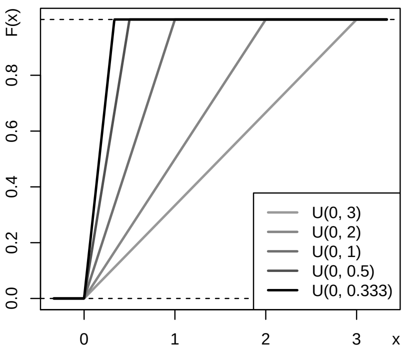


Рис. 11.10. Функция равномерного распределения $F(x)$

Функция распределения случайной величины, подчиняющейся равномерному закону $X \sim \mathbf{U}(a, b)$, имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{если } a < x \leqslant b; \\ 1, & \text{если } x > b. \end{cases}$$

Медиана, математическое ожидание и дисперсия равномерно распределённой случайной величины $X \sim \mathbf{U}(a, b)$ вычисляются по формулам:

$$x_{\frac{1}{2}} = \mathbf{M}X = \frac{a+b}{2}, \quad \mathbf{D}X = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Основным свойством равномерного распределения является его устойчивость к *линейному преобразованию*. Если дана *базовая* равномерно распределённая случайная величина $X \sim \mathbf{U}(0,1)$, то случайная величина $Y = a+(b-a)X$ также будет равномерно распределённой $Y \sim \mathbf{U}(a,b)$.

На рис. 11.9 и 11.10 показаны примеры построения графиков плотности вероятности $f(x)$ и функции распределения $F(x)$ равномерно распределённой случайной величины $X \sim \mathbf{U}(a,b)$ при значениях параметров: $a = 0$, $b = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$.

Пример 11.6. На стороне AB треугольника ABC выбирается произвольная точка $D \in AB$. Используя координаты точек $A(1,1)$, $B(4,4)$ и $C(5,2)$, найти математическое ожидание и дисперсию площади треугольника ADC.

► Площадь треугольника ADC определяется как $S = \frac{1}{2}\,|AD|\,|AC|\,\sin A$.

Для определения $\sin A$ воспользуемся соотношением $\operatorname{tg} A = \frac{k_{AB}-k_{AC}}{1+k_{AB}k_{AC}}$, где k_{AB} и k_{AC} — угловые коэффициенты соответствующих сторон, равные:

$$k_{AB} = \frac{4-1}{4-1} = \frac{4}{4} = 1;$$

$$k_{AC} = \frac{2-1}{5-1} = \frac{1}{4};$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{1-\frac{1}{4}}{1+1\cdot\frac{1}{4}} = \frac{3}{5};$$

$$\sin A = \sin\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{\sqrt{34}}.$$

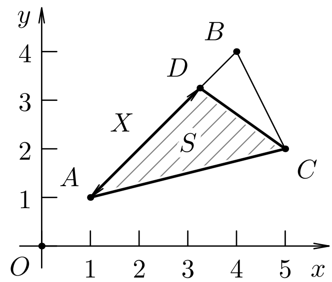


Рис. 11.11. Площадь треугольника ADC

Поскольку точка D произвольно выбирается на стороне AB, то длина AD будет равномерно распределённой случайной величиной $|AD| = X \sim \mathbf{U}(0,|AB|)$, для определения которой найдём длины отрезков $|AB|$ и $|AC|$:

$$|AB| = \sqrt{(4-1)^2+(4-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2};$$

$$|AC| = \sqrt{(5-1)^2+(2-1)^2} = \sqrt{17}.$$

В результате длина отрезка $|AD|$ соответствует случайной величине $X \sim \mathbf{U}(0, 3\sqrt{2})$, математическое ожидание и дисперсия которой определяются формулами:

$$\mathbf{M}X = \frac{0 + 3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}; \qquad \mathbf{D}X = \frac{(3\sqrt{2} - 0)^2}{12} = \frac{3}{2}.$$

Искомая площадь треугольника ADC будет соответствовать случайной величине $S = \frac{1}{2} \cdot X \cdot \sqrt{17} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{3X}{2\sqrt{2}}$, характеристики которой определяются соотношениями:

$$\mathbf{M}S = \mathbf{M}\left(\tfrac{3X}{2\sqrt{2}}\right) = \tfrac{3}{2\sqrt{2}}\,\mathbf{M}X = \tfrac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \tfrac{3\sqrt{2}}{2} = \tfrac{9}{4};$$
$$\mathbf{D}S = \mathbf{D}\left(\tfrac{3X}{2\sqrt{2}}\right) = \tfrac{9}{8}\,\mathbf{D}X = \tfrac{9}{8} \cdot \tfrac{3}{2} = \tfrac{27}{16}. \quad \blacktriangleleft$$

11.3.2. Показательное распределение

Показательное распределение возникает при моделировании *времени между* последовательными реализациями одного и того же случайного события. Непрерывная случайная величина X имеет показательное распределение: $X \sim \mathbf{E}(\lambda)$, если её плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0\,, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geqslant 0\,, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$ — параметр, интерпретируемый как среднее число случайных событий в единицу времени.

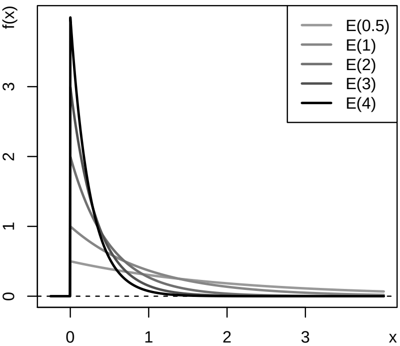


Рис. 11.12. Плотность показательного распределения $f(x)$

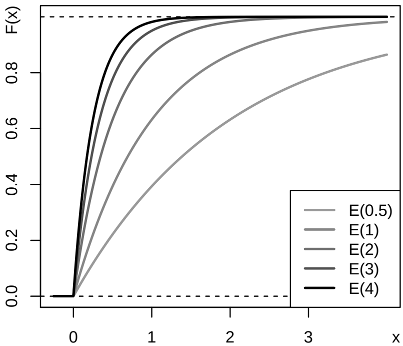


Рис. 11.13. Функция показательного распределения $F(x)$

Функция распределения показательно распределённой случайной величины: $X \sim \mathbf{E}(\lambda)$ имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0\,, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geqslant 0\,. \end{cases}$$

Медиана, математическое ожидание и дисперсия показательно распределённой случайной величины $X \sim \mathbf{E}(\lambda)$ вычисляются по формулам:

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\lambda}, \quad \mathbf{M}X = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbf{D}X = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Свойства показательного распределения:

1. $\mathbf{P}\{\alpha < X \leqslant \beta\} = \left\{ \begin{smallmatrix} 1-e^{-\lambda\beta}, & \text{если } \alpha\leqslant 0,\ \beta>0; \\ e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}, & \text{если } \alpha>0,\ \beta>0; \end{smallmatrix} \right.$
2. $\mathbf{P}\{X > \alpha + \beta \mid X > \alpha\} = \mathbf{P}\{X > \beta\}$.

Последнее свойство, известное под названием «отсутствия последействия», можно интерпретировать как утверждение о том, что промежуток между последовательными реализациями случайного события не зависит от точки начала отсчёта.

На рис. 11.12 и 11.13 показаны примеры построения графиков плотности вероятности $f(x)$ и функции распределения $F(x)$ показательно распределённой случайной величины $X \sim \mathbf{E}(\lambda)$ при значениях параметра $\lambda = \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4$.

Пример 11.7. Для показательно распределённой случайной величины $X \sim \mathbf{E}(\lambda)$ задана вероятность $\mathbf{P}\{X \leqslant 2\} = \frac{3}{4}$. Требуется найти параметр λ, записать функции плотности вероятности $f(x)$ и распределения $F(x)$, а также определить характеристики $\mathbf{M}X$, $\mathbf{D}X$ и $x_{\frac{1}{2}}$. Полученные результаты проиллюстрировать графически.

► Согласно условию для показательно распределённой случайной величины $\mathbf{P}\{X \leqslant 2\} = F(2) = 1 - e^{-2\lambda} = \frac{3}{4}$ откуда следует, что $e^{-2\lambda} = \frac{1}{4}$ или $-2\lambda = \ln\frac{1}{4}$, то есть $\lambda = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\ln 4 = \ln 2 \approx 0{,}693$.

Теперь для случайной величины $X \sim \mathbf{E}(0{,}693)$ можно записать функции плотности вероятности $f(x)$ и распределения $F(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ 0{,}693e^{-0{,}693x}, & \text{если } x \geqslant 0; \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ 1 - e^{-0{,}693x}, & \text{если } x \geqslant 0, \end{cases}$$

а также определить математическое ожидание $\mathbf{M}X$, дисперсию $\mathbf{D}X$ и медиану $x_{\frac{1}{2}}$:

$$\mathbf{M}X = \frac{1}{\ln 2} \approx 1{,}443; \quad \mathbf{D}X = \frac{1}{\ln^2 2} \approx 2{,}081; \quad x_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\ln 2} = 1.$$

Иллюстрации исходных данных и полученных результатов показаны на рис. 11.14 и 11.15.

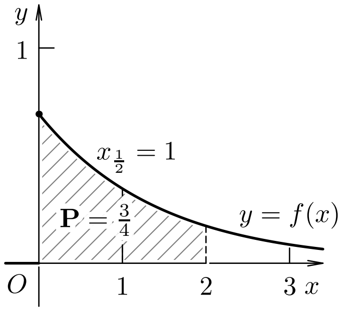


Рис. 11.14. Плотность вероятности $f(x)$ показательной случайной величины $X \sim \mathbf{E}(0{,}693)$

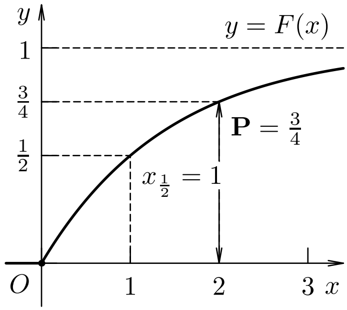


Рис. 11.15. Функция распределения $F(x)$ показательной случайной величины $X \sim \mathbf{E}(0{,}693)$

11.3.3. Нормальное распределение

Нормальное распределение обычно возникает при рассмотрении *суммы* большого количества независимо распределённых случайных величин с конечной дисперсией. Непрерывная случайная величина X имеет *нормальное распределение*: $X \sim \mathbf{N}(a,\sigma)$, если её плотность вероятности имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = \varphi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

где $x,a \in \mathbf{R}$; $\sigma > 0$; $\varphi(z)$ — функция Гаусса, определяемая равенством

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Нормальное распределение полностью определяется параметрами a и σ. Функция распределения случайной величины, подчиняющейся нормальному закону $X \sim \mathbf{N}(a,\sigma)$, имеет вид:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(z)$ — функция Лапласа, определяемая равенством

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{z} e^{-\frac{y^2}{2}} dy\,.$$

Медиана, математическое ожидание и дисперсия нормально распределённой случайной величины $X \sim \mathbf{N}(a, \sigma)$ вычисляются по формулам:

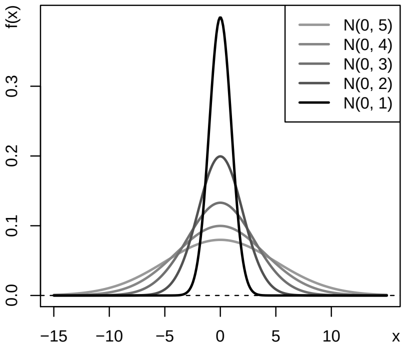


Рис. 11.16. Плотность нормального распределения $f(x)$

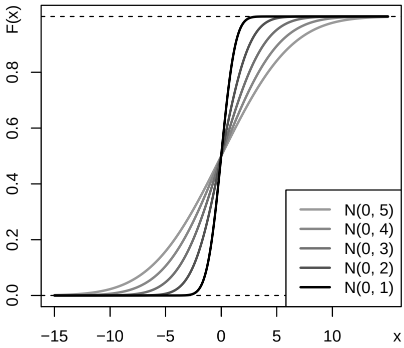


Рис. 11.17. Функция нормального распределения $F(x)$

$$x_{\frac{1}{2}} = \mathbf{M}X = a, \quad \mathbf{D}X = \sigma^2.$$

Свойства нормального распределения:

1. $\mathbf{P}\{\alpha < X \leqslant \beta\} = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)\Big|_{\alpha}^{\beta}$;
2. $\mathbf{P}\{|X - a| \leqslant \varepsilon\} = \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)$;
3. $\mathbf{P}\{|X - a| > 3\sigma\} = 0{,}0027\ldots \approx 0$.

Последнее свойство, известное под названием «правила трёх сигм», можно интерпретировать как утверждение о том, что подавляющее большинство возможных значений случайной величины $X \sim \mathbf{N}(a, \sigma)$ сосредоточено на интервале от $x_{\min} = a - 3\sigma$ до $x_{\max} = a + 3\sigma$.

На рис. 11.16 и 11.17 показаны примеры построения графиков плотности вероятности $f(x)$ и функции распределения $F(x)$ нормально распределённой случайной величины $X \sim \mathbf{N}(a,\sigma)$ при значениях параметров: $a = 0$, $\sigma = 1, 2, \ldots, 5$.

Пример 11.8. Для нормально распределённой случайной величины $X \sim \mathbf{N}(1, \sigma)$ задана вероятность $\mathbf{P}\{|X - 1| \leqslant 1\} = \frac{2}{3}$. Требуется найти параметр σ, записать функции плотности вероятности $f(x)$ и распределения $F(x)$, а также определить характеристики $\mathbf{M}X$, $\mathbf{D}X$ и $x_{\frac{1}{2}}$. Полученные результаты проиллюстрировать графически.

► Согласно условию для нормально распределённой случайной величины $\mathbf{P}\{|X - 1| \leqslant 1\} = 2\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \frac{2}{3}$ или $\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \frac{1}{3}$ откуда следует, что $\frac{1}{\sigma} \approx 0{,}968$, то есть $\sigma \approx \frac{1}{0{,}968} \approx 1{,}033$.

Теперь для случайной величины $X \sim \mathbf{N}(1; 1{,}033)$ можно записать функции плотности вероятности $f(x)$ и распределения $F(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{1{,}033\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-1)^2}{2\cdot 1{,}033^2}}; \qquad F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-1}{1{,}033}\right),$$

а также определить математическое ожидание $\mathbf{M}X$, дисперсию $\mathbf{D}X$ и медиану $x_{\frac{1}{2}}$:

$$x_{\frac{1}{2}} = \mathbf{M}X = 1; \qquad \mathbf{D}X \approx 1{,}033^2 \approx 1{,}067.$$

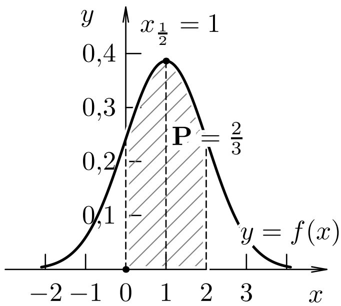


Рис. 11.18. Плотность вероятности $f(x)$ нормальной случайной величины $X \sim \mathbf{N}(1; 1{,}033)$

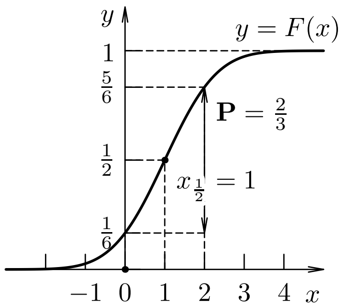


Рис. 11.19. Функция распределения $F(x)$ нормальной случайной величины $X \sim \mathbf{N}(1; 1{,}033)$

Иллюстрации исходных данных и полученных результатов показаны на рис. 11.18 и 11.19.

11.4. Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение случайной величины и закона её распределения. Каковы основные типы случайных величин?
2. Сформулируйте определение функции распределения случайной величины $F(x)$ и перечислите её свойства.
3. Сформулируйте определение плотности вероятности случайной величины $f(x)$ и перечислите её свойства.
4. Сформулируйте определение математического ожидания случайной величины $\mathbf{M}X$ и перечислите его свойства.
5. Сформулируйте определение дисперсии случайной величины $\mathbf{D}X$ и перечислите её свойства.
6. Сформулируйте определения и поясните связь между центрированной V, нормированной W и стандартной Z случайными величинами.

7. Сформулируйте определения и поясните связь между медианой, квантилями и квартилями. Каков геометрический смысл квантилей?
8. Сформулируйте законы распределения дискретных случайных величин: биномиального, геометрического и распределения Пуассона. Как найти числовые характеристики этих распределений?
9. Сформулируйте законы распределения непрерывных случайных величин: равномерного, показательного, нормального. Как найти числовые характеристики этих распределений?

Приложение A

Типовой практикум

A.1. Линейная алгебра

Задание 1. Дана система из трёх алгебраических уравнений с тремя неизвестными x, y, z.

Требуется решить заданную систему уравнений, используя формулы Крамера, матричный метод и метод Гаусса. Сделать проверку полученного решения.

Вариант № 1.1	Вариант № 1.2
$\begin{cases} 5x - y - 5z = 1; \\ 2x - y + 4z = -5; \\ x - 4y - z = 4. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x - y + 4z = 2; \\ 2x - 3z = 0; \\ x - 2y + 4z = 4. \end{cases}$
Вариант № 1.3	**Вариант № 1.4**
$\begin{cases} 2x + 5y - 2z = -3; \\ -4x - 2y + 5z = -4; \\ 5x + 5y - 3z = -4. \end{cases}$	$\begin{cases} 5y - 4z = -1; \\ 5x - 4y + z = -2; \\ -x - 3y = 4. \end{cases}$
Вариант № 1.5	**Вариант № 1.6**
$\begin{cases} 5x - 2y + 5z = -5; \\ -3x + 2y = 0; \\ -3x - 2y + 3z = -3. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 3; \\ 4x - 2y + 2z = -2; \\ x + y + 4z = 5. \end{cases}$
Вариант № 1.7	**Вариант № 1.8**
$\begin{cases} 5x - 3y + 3z = -3; \\ 4x - 4y = 4; \\ -2x - 5y + 3z = -1. \end{cases}$	$\begin{cases} -3x + 3y - 5z = 2; \\ x - 2y - 2z = 5; \\ 4x + z = -5. \end{cases}$
Вариант № 1.9	**Вариант № 1.10**
$\begin{cases} -2x + 2y = 0; \\ -5y + z = -3; \\ -3x - z = -5. \end{cases}$	$\begin{cases} -3x + 2y - 3z = 1; \\ 5y - 2z = -1; \\ 2x + 5y - 3z = 3. \end{cases}$

Вариант №1.11	Вариант №1.12
$\begin{cases} 4x+2y-2z=-2; \\ -2x-3y+z=3; \\ 5x-4y-4z=1. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x-3y+z=-5; \\ -4x-3y+2z=-4; \\ -3x-2y+3z=-1. \end{cases}$
Вариант №1.13	Вариант №1.14
$\begin{cases} 4x-3y+5z=5; \\ -4y-5z=-5; \\ -5x-y+3z=3. \end{cases}$	$\begin{cases} -3x+4y+z=5; \\ -4x+3z=-4; \\ 4x+3y-3z=-5. \end{cases}$
Вариант №1.15	Вариант №1.16
$\begin{cases} -y+3z=-4; \\ 5x-5y-z=1; \\ -2x-4y-z=-5. \end{cases}$	$\begin{cases} 3x+2y-3z=-4; \\ 4x+y+4z=-2; \\ 3x-y-4z=2. \end{cases}$
Вариант №1.17	Вариант №1.18
$\begin{cases} 2x-4y+4z=-2; \\ x+y+2z=2; \\ 3y+z=2. \end{cases}$	$\begin{cases} x-2y-5z=-4; \\ -x-2y+4z=7; \\ 3x-4y+5z=6. \end{cases}$
Вариант №1.19	Вариант №1.20
$\begin{cases} 4y-2z=-6; \\ -x-4y-2z=2; \\ x-y+z=2. \end{cases}$	$\begin{cases} -5x-4y+z=3; \\ 2x-2y+2z=0; \\ -3x-2y-z=-5. \end{cases}$
Вариант №1.21	Вариант №1.22
$\begin{cases} -3x-3y-3z=-3; \\ 5x-2y+4z=4; \\ 2x+y-5z=-5. \end{cases}$	$\begin{cases} 4x+3y+2z=2; \\ x+2y-3z=4; \\ -4x+5y-4z=0. \end{cases}$
Вариант №1.23	Вариант №1.24
$\begin{cases} -2y+4z=-2; \\ -4x+2y+2z=0; \\ 5x+y-3z=-3. \end{cases}$	$\begin{cases} 4x+4y-z=3; \\ -4x+5y-z=-6; \\ -4x+3y-3z=2. \end{cases}$
Вариант №1.25	Вариант №1.26
$\begin{cases} 2x-y+2z=1; \\ -y-2z=3; \\ 2x+4y-2z=0. \end{cases}$	$\begin{cases} -x+3z=-1; \\ x-3y-2z=-5; \\ -4x+y-z=-2. \end{cases}$

Вариант №1.27	Вариант №1.28
$\begin{cases} -x+2y+4z=-4; \\ -2y+z=4; \\ 3x+y-4z=-2. \end{cases}$	$\begin{cases} 7x-3y+2z=5; \\ 5x+y+z=0; \\ 2x-2y-z=1. \end{cases}$

Задание 2. Задана система линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными x, y, z, t.

Требуется, используя метод Гаусса, найти общее и соответствующее ему базисное решение заданной системы уравнений.

Вариант №2.1	Вариант №2.2
$\begin{cases} 4x-z-4t=2; \\ -4x-5y+z-t=-4; \\ 5y-z-3t=-2. \end{cases}$	$\begin{cases} y-5z-5t=0; \\ -x+2z+t=-2; \\ -2x+3z-5t=-5. \end{cases}$
Вариант №2.3	**Вариант №2.4**
$\begin{cases} x-3y-5z=0; \\ 4x-2z-4t=2; \\ -2x+5z=-3. \end{cases}$	$\begin{cases} 5y+2z=0; \\ -3x+5y-5z-4t=4; \\ 3x+z=-5. \end{cases}$
Вариант №2.5	**Вариант №2.6**
$\begin{cases} -3z-4t=-1; \\ -4x+3y+5t=-1; \\ -5y+5z-4t=1. \end{cases}$	$\begin{cases} x+4y-2z-2t=0; \\ x-4y+t=0; \\ 2x-z+t=0. \end{cases}$
Вариант №2.7	**Вариант №2.8**
$\begin{cases} -4x+y-2z-4t=0; \\ 4x-5y+5z=-3; \\ y+3t=-4. \end{cases}$	$\begin{cases} 3z-t=-1; \\ 5y-4z-4t=0; \\ -5x+5z+4t=4. \end{cases}$
Вариант №2.9	**Вариант №2.10**
$\begin{cases} 3x-5y+t=-1; \\ -5x+3y-2z+5t=0; \\ -2z-5t=0. \end{cases}$	$\begin{cases} -3x-y+2z-2t=-2; \\ -3x+2t=0; \\ y+5t=-5. \end{cases}$
Вариант №2.11	**Вариант №2.12**
$\begin{cases} -3x+y=0; \\ -4x+2z+t=3; \\ -3x-3y+3z-2t=-3. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x+5y-2z-2t=-2; \\ 4x-z-5t=3; \\ 2x-y+3t=0. \end{cases}$

Вариант №2.13	Вариант №2.14
$\begin{cases} 5x - 3y - z - 5t = 0; \\ x + 3y + 2z = 1; \\ -y - 2z = 0. \end{cases}$	$\begin{cases} x - 3y - 3z - t = 2; \\ 4x + 2z = 0; \\ -5x - y - z + t = 5. \end{cases}$
Вариант №2.15	Вариант №2.16
$\begin{cases} 3y + 3z + 5t = 0; \\ 5x - 2y - 2z = -1; \\ 3z + 3t = -2. \end{cases}$	$\begin{cases} -2y - 3z + 3t = -3; \\ 4x + 3z + t = 0; \\ -4x - y + 3z + t = 0. \end{cases}$
Вариант №2.17	Вариант №2.18
$\begin{cases} -4x - 2y = 4; \\ -x + 5t = 0; \\ -y - 4z = -4. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 2y + 4z + 3t = -2; \\ -4x - 2z - 4t = 0; \\ 2x + 2z + 3t = -2. \end{cases}$
Вариант №2.19	Вариант №2.20
$\begin{cases} -4x + z = -4; \\ -x + 2y - t = 0; \\ -3x + 5y + z - 4t = -3. \end{cases}$	$\begin{cases} -4x + 4z + 3t = 0; \\ -4y + z = 4; \\ 3x + 5z - 4t = 0. \end{cases}$
Вариант №2.21	Вариант №2.22
$\begin{cases} -3y + 2z = 3; \\ 3x - 4y - 5z - 2t = 3; \\ -4y - 5z - 2t = -5. \end{cases}$	$\begin{cases} x + 3y + 4t = 0; \\ 2x - 2z - 3t = 0; \\ x - 3y = 0. \end{cases}$
Вариант №2.23	Вариант №2.24
$\begin{cases} 2x - 5y + z + t = 0; \\ 2y - 4z - t = 4; \\ 3x - 4z - 3t = -2. \end{cases}$	$\begin{cases} -5x - 5y + 2z + 2t = 0; \\ 4z + 3t = -1; \\ -4x - 3t = 2. \end{cases}$
Вариант №2.25	Вариант №2.26
$\begin{cases} 2x - 3z = -1; \\ -4x - z + 2t = 0; \\ 3x - y - 3z - t = -2. \end{cases}$	$\begin{cases} -2x - 4y - 4z + 3t = 1; \\ 3x - 4y + 5t = 0; \\ -2x + 2y - t = -5. \end{cases}$
Вариант №2.27	Вариант №2.28
$\begin{cases} -y - 2z - 4t = 0; \\ -3x + 5z - 4t = 1; \\ -5x - y - z = -3. \end{cases}$	$\begin{cases} 4x - 2y + 3z = -5; \\ 4x + 2y - t = -2; \\ -5z + 4t = 5. \end{cases}$

А.2. Аналитическая геометрия

Задание 3. Даны координаты вершин треугольника ABC.
Требуется: 1) найти длину стороны AB; 2) составить уравнения сторон AB и BC и вычислить их угловые коэффициенты; 3) вычислить внутренний угол при вершине B в радианах; 4) составить уравнение медианы AE; 5) составить уравнение и вычислить длину высоты CD; 6) составить уравнение прямой, проходящей через точку E параллельно стороне AB и определить координаты точки M ее пересечения с высотой CD; 7) составить уравнение окружности с центром в точке E, проходящей через вершину C.
Указание. Заданный треугольник, все полученные линии и характерные точки необходимо построить в системе координат xOy.

Вариант № 3.1	$A(1,-2)$,	$B(2,3)$,	$C(5,0)$.
Вариант № 3.2	$A(5,3)$,	$B(4,8)$,	$C(1,5)$.
Вариант № 3.3	$A(2,2)$,	$B(3,-3)$,	$C(6,0)$.
Вариант № 3.4	$A(4,-1)$,	$B(3,-6)$,	$C(0,-3)$.
Вариант № 3.5	$A(3,-1)$,	$B(4,4)$,	$C(7,1)$.
Вариант № 3.6	$A(-1,-6)$,	$B(-2,-1)$,	$C(-5,-4)$.
Вариант № 3.7	$A(-2,5)$,	$B(-1,0)$,	$C(2,3)$.
Вариант № 3.8	$A(5,-3)$,	$B(4,-8)$,	$C(1,-5)$.
Вариант № 3.9	$A(-1,-1)$,	$B(0,4)$,	$C(3,1)$.
Вариант № 3.10	$A(-5,1)$,	$B(-6,6)$,	$C(-9,3)$.
Вариант № 3.11	$A(3,5)$,	$B(4,0)$,	$C(7,3)$.
Вариант № 3.12	$A(0,6)$,	$B(-1,1)$,	$C(-4,4)$.
Вариант № 3.13	$A(-3,-1)$,	$B(-2,4)$,	$C(1,1)$.
Вариант № 3.14	$A(-4,1)$,	$B(-5,6)$,	$C(-8,3)$.
Вариант № 3.15	$A(1,1)$,	$B(2,-4)$,	$C(5,-1)$.
Вариант № 3.16	$A(-3,2)$,	$B(-4,-3)$,	$C(-7,0)$.
Вариант № 3.17	$A(3,0)$,	$B(4,5)$,	$C(7,2)$.
Вариант № 3.18	$A(-4,-6)$,	$B(-5,-1)$,	$C(-8,-4)$.
Вариант № 3.19	$A(4,-3)$,	$B(5,-8)$,	$C(8,-5)$.
Вариант № 3.20	$A(0,-3)$,	$B(-1,-8)$,	$C(-4,-5)$.
Вариант № 3.21	$A(-3,-3)$,	$B(-2,2)$,	$C(1,-1)$.
Вариант № 3.22	$A(1,-6)$,	$B(0,-1)$,	$C(-3,-4)$.
Вариант № 3.23	$A(4,5)$,	$B(5,0)$,	$C(8,3)$.

Вариант № 3.24	$A(2,-2)$,	$B(1,-7)$,	$C(-2,-4)$.
Вариант № 3.25	$A(0,4)$,	$B(1,9)$,	$C(4,6)$.
Вариант № 3.26	$A(-2,4)$,	$B(-3,9)$,	$C(-6,6)$.
Вариант № 3.27	$A(-4,-2)$,	$B(-3,-7)$,	$C(0,-4)$.
Вариант № 3.28	$A(3,5)$,	$B(2,0)$,	$C(-1,3)$.

Задание 4. Даны координаты точек: A, B, C, D.
Требуется: 1) вычислить координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ в базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ и найти модули этих векторов; 2) определить угол между векторами $\overline{AB}$, $\overline{AC}$; 3) найти проекцию вектора $\overline{AD}$ на вектор $\overline{AB}$; 4) найти площадь грани ABC; 5) найти объём пирамиды $ABCD$; 6) составить уравнение ребра AC и грани ABC.

№ 4.1	$A(0,-1,1)$,	$B(2,-2,3)$,	$C(2,-4,0)$,	$D(4,-1,0)$.
№ 4.2	$A(0,1,0)$,	$B(2,2,3)$,	$C(2,4,-1)$,	$D(4,1,0)$.
№ 4.3	$A(0,-1,0)$,	$B(2,-2,3)$,	$C(2,-4,1)$,	$D(4,-1,0)$.
№ 4.4	$A(0,1,-1)$,	$B(-2,2,-3)$,	$C(-2,4,0)$,	$D(-4,1,0)$.
№ 4.5	$A(1,0,1)$,	$B(3,-1,4)$,	$C(3,-3,2)$,	$D(5,0,1)$.
№ 4.6	$A(1,2,1)$,	$B(-1,3,-2)$,	$C(-1,5,0)$,	$D(-3,2,1)$.
№ 4.7	$A(1,2,0)$,	$B(3,3,4)$,	$C(3,5,1)$,	$D(5,2,1)$.
№ 4.8	$A(2,1,1)$,	$B(0,0,-1)$,	$C(0,-2,2)$,	$D(-2,1,2)$.
№ 4.9	$A(2,1,2)$,	$B(4,0,5)$,	$C(4,-2,3)$,	$D(6,1,2)$.
№ 4.10	$A(2,3,2)$,	$B(0,4,-1)$,	$C(0,6,1)$,	$D(-2,3,2)$.
№ 4.11	$A(2,3,1)$,	$B(4,4,5)$,	$C(4,6,2)$,	$D(6,3,2)$.
№ 4.12	$A(3,2,4)$,	$B(1,1,0)$,	$C(1,-1,3)$,	$D(-1,2,3)$.
№ 4.13	$A(3,2,3)$,	$B(5,1,6)$,	$C(5,-1,2)$,	$D(7,2,3)$.
№ 4.14	$A(3,4,3)$,	$B(1,5,0)$,	$C(1,7,4)$,	$D(-1,4,3)$.
№ 4.15	$A(3,4,2)$,	$B(5,5,6)$,	$C(5,7,3)$,	$D(7,4,3)$.
№ 4.16	$A(4,3,3)$,	$B(2,2,1)$,	$C(2,0,4)$,	$D(0,3,4)$.
№ 4.17	$A(4,3,4)$,	$B(6,2,7)$,	$C(6,0,3)$,	$D(8,3,4)$.
№ 4.18	$A(4,5,4)$,	$B(6,6,7)$,	$C(6,8,5)$,	$D(8,5,4)$.
№ 4.19	$A(5,4,4)$,	$B(3,3,2)$,	$C(3,1,5)$,	$D(1,4,5)$.
№ 4.20	$A(5,6,6)$,	$B(3,7,2)$,	$C(3,9,5)$,	$D(1,6,5)$.
№ 4.21	$A(5,6,5)$,	$B(7,7,8)$,	$C(7,9,4)$,	$D(9,6,5)$.
№ 4.22	$A(7,6,7)$,	$B(9,5,10)$,	$C(9,3,8)$,	$D(11,6,7)$.
№ 4.23	$A(7,8,6)$,	$B(5,9,4)$,	$C(5,11,7)$,	$D(3,8,7)$.

№ 4.24	$A(7,8,8)$,	$B(9,9,10)$,	$C(9,11,7)$,	$D(11,8,7)$.
№ 4.25	$A(8,7,8)$,	$B(10,6,11)$,	$C(10,4,7)$,	$D(12,7,8)$.
№ 4.26	$A(8,9,8)$,	$B(6,10,5)$,	$C(6,12,9)$,	$D(4,9,8)$.
№ 4.27	$A(9,8,8)$,	$B(11,7,12)$,	$C(11,5,9)$,	$D(13,8,9)$.
№ 4.28	$A(9,8,10)$,	$B(7,7,6)$,	$C(7,5,9)$,	$D(5,8,9)$.

Задание 5. Даны уравнения окружности и другой центральной кривой второго порядка.

Требуется найти координаты центров и основные параметры заданных кривых. Все полученные линии и характерные точки построить в системе координат xOy.

Вариант № 5.1	Вариант № 5.2
$x^2+y^2-4x-6y+4=0;$ $9x^2+25y^2-225=0.$	$x^2+y^2+6x-10y+30=0;$ $25x^2-49y^2-1225=0.$
Вариант № 5.3	Вариант № 5.4
$x^2+y^2+2x-4y-13=0;$ $4x^2+49y^2-196=0.$	$x^2+y^2-6x+8y=0;$ $16x^2-25y^2-400=0.$
Вариант № 5.5	Вариант № 5.6
$x^2+y^2+10x-2y+25=0;$ $64x^2-25y^2-1600=0.$	$x^2+y^2-6x+2y-15=0;$ $16x^2-25y^2-400=0.$
Вариант № 5.7	Вариант № 5.8
$x^2+y^2+6x+6y+14=0;$ $25x^2+36y^2-900=0.$	$x^2+y^2-2x+2y+1=0;$ $9x^2-16y^2-144=0.$
Вариант № 5.9	Вариант № 5.10
$x^2+y^2+4x-2y-31=0;$ $16x^2+25y^2-400=0.$	$x^2+y^2-8x+4y-29=0;$ $25x^2-64y^2-1600=0.$
Вариант № 5.11	Вариант № 5.12
$x^2+y^2+8x-8y+23=0;$ $25x^2+49y^2-1225=0.$	$x^2+y^2-10x+2y+22=0;$ $9x^2-36y^2-324=0.$
Вариант № 5.13	Вариант № 5.14
$x^2+y^2+10x-12y+45=0;$ $4x^2+16y^2-64=0.$	$x^2+y^2-2x+10y+25=0;$ $4x^2-9y^2-36=0.$
Вариант № 5.15	Вариант № 5.16
$x^2+y^2+2x-6y-15=0;$ $9x^2+49y^2-441=0.$	$x^2+y^2-6x-4y-23=0;$ $16x^2-49y^2-784=0.$
Вариант № 5.17	Вариант № 5.18
$x^2+y^2+4x+8y-29=0;$ $25x^2+64y^2-1600=0.$	$x^2+y^2-6x-4y+4=0;$ $4x^2-36y^2-144=0.$

Вариант № 5.19	Вариант № 5.20
$x^2+y^2-10x+6y+30=0;$ $16x^2+49y^2-784=0.$	$x^2+y^2+2x+2y-14=0;$ $36x^2-64y^2-2304=0.$
Вариант № 5.21	**Вариант № 5.22**
$x^2+y^2-4x-6y-14=0;$ $36x^2-9y^2-324=0.$	$x^2+y^2+8x-6y=0;$ $25x^2+9y^2-225=0.$
Вариант № 5.23	**Вариант № 5.24**
$x^2+y^2-6x-6y+15=0;$ $49x^2-25y^2-1225=0.$	$x^2+y^2+2x-2y+1=0;$ $49x^2+4y^2-196=0.$
Вариант № 5.25	**Вариант № 5.26**
$x^2+y^2-2x+4y-31=0;$ $25x^2-16y^2-400=0.$	$x^2+y^2-8x+8y+23=0;$ $36x^2+25y^2-900=0.$
Вариант № 5.27	**Вариант № 5.28**
$x^2+y^2+2x-10y+22=0;$ $16x^2-9y^2-144=0.$	$x^2+y^2-12x+10y+45=0;$ $25x^2+16y^2-400=0.$

А.3. Анализ функций одной переменной

Задание 6. Найти указанные пределы.

Вариант № 6.1	Вариант № 6.2
$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2};$	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+5x-7}{3x^2+x-4};$
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+5x}-1}{3x};$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2x^2+7}-\sqrt{7}}{\sqrt{x^2+1}-1};$
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\operatorname{tg}3x}{\sin 6x};$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{9x\cos 4x};$
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+5}\right)^{x+8}.$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{x+1}.$
Вариант № 6.3	**Вариант № 6.4**
$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+5x+2};$	$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-x-12}{2x^2-9x+4};$
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right);$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+2x}-1};$
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\operatorname{tg}10x}{\sin^2 6x};$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x^2};$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-3}{2x^2+1}\right)^{-3x^2}.$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{2x}.$
Вариант №6.5	Вариант №6.6
$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{3x^2+10x+3}{x^2-2x-15};$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x};$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\operatorname{tg}6x}{5x^2};$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{4x+12}.$	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+2x-5}{x^2+x-2};$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+8x}-1}{\sqrt{1+2x}-1};$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{3\operatorname{tg}4x};$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^3-2}{5x^3+1}\right)^{-6x^3}.$
Вариант №6.7	Вариант №6.8
$\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{3x^2+11x-4}{x^2+3x-4};$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x+10}-\sqrt{x+20}\right);$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\operatorname{tg}6x}{\sin^2 8x};$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x+5}\right)^{x-1}.$	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{2x^2+x-10};$ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2+x-2};$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 7x}{3x\cos 2x};$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+7}{4x+2}\right)^{x^2+1}.$
Вариант №6.9	Вариант №6.10
$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+4x-7}{x^2+6x-7};$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{10x}{\sqrt{4+5x}-2};$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2}{1-\cos 8x};$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^2+2}{4x^2-1}\right)^{5x^2}.$	$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+x-2}{4x^2+7x-2};$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+3x^2}-1}{2x};$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 6x}{x\operatorname{tg}4x};$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x+5}\right)^{2x^2-1}.$
Вариант №6.11	Вариант №6.12
$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-6x-7}{2x^2+x-1};$ $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}};$	$\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-3x-10};$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right);$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7\sin 10x}{\operatorname{tg} 3x}$;	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 2x}{3x^2}$;
$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2+3x}{3x-7}\right)^{x}$.	$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2}{x^2-9}\right)^{8x-3}$.
Вариант № 6.13	**Вариант № 6.14**
$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2+x-4}{2x^2+3x-5}$;	$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2-7x+3}{x^2-2x-3}$;
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$;	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+25}-5}{\sqrt{x^2+16}-4}$;
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{6x^2}$;	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x\cos 5x}{\sin 6x}$;
$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{7x^{10}-3}{7x^{10}+2}\right)^{-2x^{10}}$.	$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{6x+1}{2+6x}\right)^{2x}$.
Вариант № 6.15	**Вариант № 6.16**
$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+4x-12}{x^2+x-6}$;	$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2+x-3}{3x^2+3x-6}$;
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+x^2}-2}{7x}$;	$\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x\operatorname{tg} 4x}{\sin^2 9x}$;	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x^2}{1-\cos x}$;
$\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x+1}$.	$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2+2}$.
Вариант № 6.17	**Вариант № 6.18**
$\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x^2+7x+2}{x^2-2x-8}$;	$\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-6x+8}{4x^2-17x+4}$;
$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-4}{x-3}$;	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3x^2+5}-\sqrt{5}}{\sqrt{x^2+4}-2}$;
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\operatorname{tg} 2x}{\sin 8x}$;	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4\sin 10x}{3x\cos 3x}$;
$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x+11}{3x-1}\right)^{2x^2}$.	$\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{6x}{6x-4}\right)^{x^2+5}$.
Вариант № 6.19	**Вариант № 6.20**
$\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{5x^2+6x+1}{x^2-3x-4}$;	$\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{4x^2-11x-3}{x^2+3x-18}$;

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x^2-x}-\sqrt{3x^2+2x}\right)$;
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x\sin 7x}{x^2}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 4x}{x\operatorname{tg}6x}$;
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-2}{3x^2+3}\right)^{-4x}$.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-3}{4x+11}\right)^{3x}$.
Вариант №6.21	Вариант №6.22
$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+7x-10}{2x^2+x-3}$;	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2+x-10}$;
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x-x^2}-1}{x}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+1}-1}$;
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos 2x}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\cos 5x}{\sin 2x}$;
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x^5+9}{7x^5+5}\right)^{6x-3}$.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x^3+3}{4x^3+1}\right)^{-2x^2}$.
Вариант №6.23	Вариант №6.24
$\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{5x^2+14x-3}{x^2-x-12}$;	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2+4x+3}$;
$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+12}-4}{x-4}$;	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{6x^2-3x}-8x\right)$;
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 6x}{\operatorname{tg}5x}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x^2}$;
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-8}{5x-3}\right)^{4x^2+1}$.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-4}\right)^{5x+3}$.
Вариант №6.25	Вариант №6.26
$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+2x-3}{5x^2-2x-7}$;	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-7x+6}$;
$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{\sqrt{1+3x}-1}$;
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x\operatorname{tg}3x}{\sin^2 9x}$;	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\cos 2x}{\sin x\cos x}$;
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2-2}{5x^2-4}\right)^{-x^2+3}$.	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+9}{x-5}\right)^{3x+2}$.

Вариант №6.27	Вариант №6.28
$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{6x^2+11x-2}{x^2-x-6};$	$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+2x-15}{3x^2-13x+12};$
$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2};$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{2x};$
$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x\sin 2x}{\operatorname{tg}^2 x};$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{2x\cos 2x};$
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x}{7x+3}\right)^{10x-1}.$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-8}{2x-3}\right)^{x^2+4}.$

А.4. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Задание 7. Найти производную y' от заданных функций, пользуясь основными правилами и формулами дифференцирования.

Вариант №7.1	Вариант №7.2
$y_1=2x^4+\dfrac{3}{x^2}-7\sqrt{x}+\sqrt[5]{x};$	$y_1=-3x^2-\dfrac{4}{x^6}+5\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x^3};$
$y_2=(3x^2+\ln x)\cos x;$	$y_2=(\sin x-\sqrt{x})\ln x-6x^3\,2^x;$
$y_3=\dfrac{9x-4^x}{x^2+6};$	$y_3=\dfrac{-3x+x^2}{5x^2+e^x};$
$y_4=\sin(15x-6);$	$y_4=e^{3x+2};$
$y_5=(9x^2+11)^{13};$	$y_5=\cos\sqrt[3]{6x^4-9};$
$y_6=\ln\cos(12-5x);$	$y_6=\log_2(x+\sqrt{x^2+3});$
$y_7=\operatorname{tg}^2(8x+3);$	$y_7=\operatorname{ctg}^5(4-x^3);$
$y_8=2\sqrt{e^{x^2+15x}};$	$y_8=2^{\cos 8x+\operatorname{tg}x};$
$y_9=\arcsin\sqrt{9^{3x}-2};$	$y_9=\sqrt{\operatorname{arctg}e^{6x}};$
$y_{10}=5^{\sin\ln 4x};$	$y_{10}=\ln\sin\sqrt{5x^3-3};$
$y_{11}=\dfrac{1}{\operatorname{ctg}^7 2x};$	$y_{11}=\dfrac{1}{8^x-5\operatorname{tg}2x};$
$y_{12}=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{4x}{1-x^2}\right).$	$y_{12}=\arccos\sqrt{\dfrac{8}{1+x^2}}.$

Вариант №7.3	Вариант №7.4
$y_1=-x^3+\dfrac{7}{x^5}-4\sqrt[4]{x^3}+\dfrac{2}{\sqrt{x^7}};$	$y_1=4x^6-\dfrac{1}{x^5}-\dfrac{5}{\sqrt{x}}+8\sqrt[5]{x^3};$
$y_2=e^x\,\operatorname{tg}x-(3x^3+\sqrt{x})\ln x;$	$y_2=(2x^7-3x^4)\,5^x-e^x\sin x;$

$y_3 = \dfrac{\cos x - \sqrt{x}}{x^3 + 16x};$	$y_3 = \dfrac{3^x - 9x}{2\ln x - x^4};$
$y_4 = \sqrt{4 - 2x};$	$y_4 = 5^{6x+3};$
$y_5 = \log_3(3x + 5);$	$y_5 = (-x^5 + 2x^2)^{10};$
$y_6 = \arccos e^{5x};$	$y_6 = \cos\sqrt{3x - 7x^3};$
$y_7 = \sin(x^3 - 8)^4;$	$y_7 = \sqrt{5 - 4e^{2x}};$
$y_8 = \sqrt{\operatorname{tg}(3^x + x^2)};$	$y_8 = \ln\sin 8x;$
$y_9 = \ln^2\cos 7x;$	$y_9 = \operatorname{tg}^5\sqrt{3e^x};$
$y_{10} = e^{\sqrt{\operatorname{ctg}(2x - x^4)}};$	$y_{10} = 2^{\operatorname{arctg} x^4};$
$y_{11} = \dfrac{3}{\sin\sqrt[3]{10x}};$	$y_{11} = \dfrac{6}{\sin 2x + 9^x};$
$y_{12} = \ln\left(\dfrac{1 + x^2}{1 - x^2}\right).$	$y_{12} = \arcsin\left(\dfrac{1 + x}{2 - 4x}\right).$
Вариант № 7.5	Вариант № 7.6
$y_1 = x^4 + \dfrac{3}{5x} + 2\sqrt{x} - 3\sqrt[5]{x^4};$	$y_1 = x^{11} + \dfrac{9}{\sqrt{x^3}} - 7\sqrt[4]{x} - 5\sqrt[6]{x^7};$
$y_2 = \ln x\,(5 - x^2) + e^x\operatorname{ctg} x;$	$y_2 = \sin x\,\ln x - (\sqrt{x} + 5x^5)\,3^x;$
$y_3 = \dfrac{\sin x - 2x^5}{3x^4 + 6x};$	$y_3 = \dfrac{\ln x - 3\sqrt{x}}{5x^4 - 2x^5};$
$y_4 = \cos(5 - 3x);$	$y_4 = \operatorname{tg}(2x + 5);$
$y_5 = \sqrt[3]{6x + 3};$	$y_5 = (-x^2 + 8x + 10)^4;$
$y_6 = \operatorname{ctg}(2x^3 - 8)^2;$	$y_6 = \sin e^{7 - 6x^2};$
$y_7 = e^{\log_3(4x - x^5)};$	$y_7 = \sqrt{\operatorname{tg} 2^x};$
$y_8 = \sin\sqrt{7x^3 + 2};$	$y_8 = \log_4\sqrt{1 - 5x};$
$y_9 = 2^{\cos^3 6x};$	$y_9 = \sin^6\ln 3x;$
$y_{10} = \sqrt{\arcsin\operatorname{tg} 3x};$	$y_{10} = \cos\arcsin\sqrt{6x};$
$y_{11} = \dfrac{2}{\cos 4x - 5^x};$	$y_{11} = \dfrac{9}{\ln 2x + 3^{x^2}};$
$y_{12} = \sqrt{\dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}}.$	$y_{12} = \operatorname{arcctg}\left(\dfrac{x}{\sqrt{7 - x^2}}\right).$
Вариант № 7.7	Вариант № 7.8
$y_1 = 5x + \dfrac{4}{x^3} + 2\sqrt[5]{x} - \dfrac{8}{\sqrt[3]{x}};$	$y_1 = -2x^4 - \dfrac{4}{x^2} - 3\sqrt[4]{x} + \sqrt{x^7};$
$y_2 = (4x^3 + \sin x)\ln x + e^x\,x^8;$	$y_2 = (\cos x - x^2)\ln x - 2x^2\,8^x;$
$y_3 = \dfrac{-x^6 + 14x}{\sqrt{x} + 6x^3};$	$y_3 = \dfrac{5^x - 3x^2}{2x^5 + 4x};$
$y_4 = \sin(1 - 4x);$	$y_4 = e^{2 - 6x};$

$y_5 = \ln(3x+2);$	$y_5 = \sqrt[5]{9x-3x^3};$
$y_6 = \operatorname{ctg}^4(2+5x^3);$	$y_6 = \operatorname{tg}\sqrt{3+5x^4};$
$y_7 = 8^{3-\cos 3x};$	$y_7 = e^{\operatorname{ctg} 9x-5};$
$y_8 = \operatorname{tg}\ln(x^4-7x^2);$	$y_8 = \cos^7\dfrac{x^2}{\sqrt{3}};$
$y_9 = e^{\sin\ln 2x};$	$y_9 = \sqrt{\arcsin x^8};$
$y_{10} = \arccos\sqrt{6^{2x}};$	$y_{10} = \sin 5^{\ln\sqrt{x}};$
$y_{11} = \dfrac{8}{2x^3-\sqrt[4]{5x}};$	$y_{11} = \dfrac{1}{\log_3 6x - 2x^2};$
$y_{12} = \ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}.$	$y_{12} = \arccos\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$
Вариант №7.9	**Вариант №7.10**
$y_1 = 4x^6 - \dfrac{2}{x^3} + \sqrt[9]{x^5} + \dfrac{10}{\sqrt{x^4}};$	$y_1 = -x^2 + \dfrac{7}{x^3} - \dfrac{4}{\sqrt{x}} - 9\sqrt[3]{x^{10}};$
$y_2 = 6^x\ \operatorname{ctg} x - (4x^5+\sqrt{x})\,e^x;$	$y_2 = (3x^5-x^7)\,7^x - e^x\ \cos x;$
$y_3 = \dfrac{x^7-2\sqrt{x}}{8x-e^x};$	$y_3 = \dfrac{6x^3+\ln x}{4x-2x^2};$
$y_4 = \sqrt{5x+1};$	$y_4 = 3^{\,2-x};$
$y_5 = \log_4(2x-7);$	$y_5 = (12x-4x^3)^6;$
$y_6 = \arcsin 7^{x^3};$	$y_6 = \sin\ln(3x^2-5);$
$y_7 = 6^{\operatorname{ctg} e^x - 3x^2};$	$y_7 = \sqrt{5x^7-e^{8x}};$
$y_8 = \sqrt[3]{\cos^4 x - 1};$	$y_8 = \log_3\arccos 2x;$
$y_9 = \sin^2\ln 6x;$	$y_9 = \operatorname{tg}\sqrt[4]{3-2e^{5x}};$
$y_{10} = e^{\sqrt{(2+4x^3)^5}};$	$y_{10} = 8^{\sqrt{\arcsin x^9}};$
$y_{11} = \dfrac{1}{\ln\sqrt{x}+3x^7};$	$y_{11} = \dfrac{9}{6x-\operatorname{ctg} 2x};$
$y_{12} = \left(\dfrac{2-x}{3x+5}\right)^4.$	$y_{12} = e^{\frac{2+3x^2}{4-5x^2}}.$
Вариант №7.11	**Вариант №7.12**
$y_1 = -3x^2 - \dfrac{2}{x^4} + 6\sqrt{x} + 9\sqrt[7]{x^4};$	$y_1 = 4x^9 - \dfrac{3}{\sqrt{x^5}} + 8\sqrt[6]{x} - 5\sqrt[3]{x^8};$
$y_2 = \ln x\,(\sqrt{x}-4x) + 5x^4\operatorname{tg} x;$	$y_2 = \cos x\,3^x - (2x^2-5x^4)\,e^x;$
$y_3 = \dfrac{9^x+4x^3}{x^2-3\sqrt{x}};$	$y_3 = \dfrac{\cos x - 5x^4}{6x+x^2};$
$y_4 = \cos(2x-1);$	$y_4 = \operatorname{tg}(7-4x);$
$y_5 = \sqrt[4]{2-5x};$	$y_5 = (-x^3+4x^2)^6;$
$y_6 = \sin(6x^2-8)^3;$	$y_6 = e^{\sin x^3 - 2x};$

$y_7 = e^{\sqrt{x^5+6x}};$	$y_7 = \log_6 \sqrt{3x - x^4};$
$y_8 = \operatorname{arctg} \cos 3x;$	$y_8 = \operatorname{arctg}^2 4x;$
$y_9 = \ln 6^{\sin x^4};$	$y_9 = \sqrt{3^{\ln 8x}};$
$y_{10} = \sqrt[3]{1 + \operatorname{ctg}^2 7x};$	$y_{10} = \operatorname{tg} \operatorname{ctg} e^{\sqrt{x}};$
$y_{11} = \dfrac{2}{\operatorname{tg} 5x - \sqrt{x}};$	$y_{11} = \dfrac{7}{\arccos 5x - 2x^4};$
$y_{12} = \arcsin\left(\dfrac{8-3x}{4x+5}\right).$	$y_{12} = \log_3\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right).$

Вариант № 7.13	Вариант № 7.14
$y_1 = 3x + \dfrac{2}{x^6} + \sqrt[3]{x} - \dfrac{9}{\sqrt[4]{x^5}};$	$y_1 = -\dfrac{x^5}{10} + \dfrac{2}{x^9} - 4\sqrt{x} + \sqrt[4]{x};$
$y_2 = 2^x \sin x - 3e^x\,(7 - 4x^2);$	$y_2 = \ln x\,(4 - \sqrt{x}) + 3x^3 \sin x;$
$y_3 = \dfrac{-2\ln x + 4x^5}{x^3+6};$	$y_3 = \dfrac{9x-4}{x^2+6};$
$y_4 = \ln(3x+7);$	$y_4 = \log_4(2x-5);$
$y_5 = \sin(4 - 3x^2);$	$y_5 = (3x - 4x^3)^5;$
$y_6 = \sqrt[6]{\operatorname{tg}(x^3 - 2x)};$	$y_6 = \sin\sqrt{e^x - 6x};$
$y_7 = \arcsin \sqrt[4]{x};$	$y_7 = \operatorname{arcctg}^3 2x;$
$y_8 = \operatorname{ctg} 2^{\ln 6x};$	$y_8 = \cos \log_4 3^{7x};$
$y_9 = e^{\sin(7x)^4};$	$y_9 = e^{-\arcsin\sqrt{10x}};$
$y_{10} = \operatorname{arctg}^7 3\sqrt{x};$	$y_{10} = 6\sqrt{8^{\ln x^5}};$
$y_{11} = \dfrac{1}{\cos 2x^3 - 10x};$	$y_{11} = \dfrac{3}{\sqrt[5]{6x} - 2x^4};$
$y_{12} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{2+3e^x}{6-4e^x}\right).$	$y_{12} = \arccos\left(\dfrac{1-x}{7+3x}\right).$

Вариант № 7.15	Вариант № 7.16
$y_1 = -\dfrac{2}{5x} + \dfrac{x^4}{6} - \sqrt[3]{x^2} + \dfrac{4}{x^2};$	$y_1 = 4x - \dfrac{7}{x^4} - \sqrt[5]{x^3} + \dfrac{3}{\sqrt{x}};$
$y_2 = (x^3+8)\cos x - 3^x \ln x;$	$y_2 = e^x\,(3x^4 + \sqrt{x}) - \cos x\,\dfrac{2}{x};$
$y_3 = \dfrac{e^x - \sqrt{x}}{3^{5x}+4};$	$y_3 = \dfrac{3\operatorname{tg} x - x^4}{2^x - \sin x};$
$y_4 = \ln(7x+10);$	$y_4 = \sin(5x-3);$
$y_5 = \sqrt{4-5x};$	$y_5 = (2x-8)^4;$
$y_6 = 3^{\operatorname{tg}(11x-2)};$	$y_6 = \operatorname{tg} e^{2x^2-8};$
$y_7 = \sin \lg(2x^2 - 7x);$	$y_7 = \arcsin\sqrt{8x};$
$y_8 = \cos^7 e^{2x};$	$y_8 = \sqrt{\lg 6x - 2x^5};$

$y_9 = \arcsin\sqrt{1-4^{x^2}}$;	$y_9 = \cos^9 3^{3x-2x^4}$;
$y_{10} = e^{\mathrm{ctg}\sin 6x}$;	$y_{10} = \log_7 \sin^2 3x$;
$y_{11} = \dfrac{5}{\mathrm{tg}\, 3x - 7x^2}$;	$y_{11} = \dfrac{12}{e^{3x} - 2^x}$;
$y_{12} = \sqrt{\dfrac{2-4x}{3-2x^5}}$.	$y_{12} = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{x}+4}{3-\sqrt{x}}\right)$.
Вариант №7.17	Вариант №7.18
$y_1 = 2x^5 - \dfrac{10^x}{x^8} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}} + \dfrac{3\sqrt{x^3}}{10}$;	$y_1 = -x^3 - 4\sqrt[4]{x^3} + \dfrac{6}{\sqrt[3]{x}} - 8x^2$;
$y_2 = (6x+1)\,\mathrm{tg}\, x - 2^x\sqrt{x}$;	$y_2 = (\sqrt{x}-5)\,\mathrm{tg}\, x - 2x^8\, e^x$;
$y_3 = \dfrac{8-3\ln x}{3x^4 - x}$;	$y_3 = \dfrac{6x-3x^7}{2-3\sqrt{x}}$;
$y_4 = \ln(3x-4)$;	$y_4 = \sin(3x - x^3)$;
$y_5 = \mathrm{ctg}\, e^x$;	$y_5 = (3-2x)^7$;
$y_6 = \sqrt{7-3^{x^4}}$;	$y_6 = \arcsin(5x)^4$;
$y_7 = \cos(12x^2 - 5x)^{11}$;	$y_7 = e^{\sqrt{7-9x^2}}$;
$y_8 = \sin\mathrm{tg}(2x - 9x^5)$;	$y_8 = \sqrt[4]{\mathrm{tg}\, 3^{5x^2}}$;
$y_9 = 4^{\arccos\ln 6x}$;	$y_9 = 8^{\mathrm{arcctg}\, e^{6x}}$;
$y_{10} = 8^{\sqrt{2x-1}}$;	$y_{10} = \lg\sqrt{\cos(3x-2)}$;
$y_{11} = \dfrac{2}{3+(9-7x)^3}$;	$y_{11} = \dfrac{1}{\sqrt{2x} - 6x^3}$;
$y_{12} = e^{\frac{7x-3x^2}{6x+10}}$.	$y_{12} = \arccos\left(\dfrac{16+\ln x}{7-5\ln x}\right)$.
Вариант №7.19	Вариант №7.20
$y_1 = 4x^6 - 5\sqrt[4]{x} + \dfrac{6}{x^2} - \dfrac{7}{x}$;	$y_1 = 3x^7 - \dfrac{2}{x^5} + 6\sqrt[3]{x^7} - \dfrac{8}{x}$;
$y_2 = (7x^4+5)\ln x - \sqrt{x}\ \mathrm{ctg}\, x$;	$y_2 = (2x^5+7)\,\mathrm{tg}\, x - x^4\ \ln x$;
$y_3 = \dfrac{4-6x^3}{\sin x + 8x}$;	$y_3 = \dfrac{\ln x - 4x^5}{2x + x^{-2}}$;
$y_4 = \cos(12x+1)$;	$y_4 = 3e^{2-6x}$;
$y_5 = (3x-4x^3)^{10}$;	$y_5 = 4^{\arccos x}$;
$y_6 = \sqrt{\ln(4x-5x^2)}$;	$y_6 = \mathrm{tg}(7-3x^2)^4$;
$y_7 = e^{\mathrm{tg}(5x+7x^6)}$;	$y_7 = \sin\sqrt{4x+5x^3}$;
$y_8 = \sin\sqrt[5]{9x^3}$;	$y_8 = \lg\cos^2 10x$;
$y_9 = 5^{\cos\sqrt{x^4-12x}}$;	$y_9 = \arcsin\sqrt{3^{\mathrm{ctg}\, x}}$;
$y_{10} = \ln\arcsin^3\sqrt{x}$;	$y_{10} = \mathrm{ctg}^6 e^{x^2}$;

$y_{11} = \dfrac{4}{\operatorname{tg} 7x - 3x^6};$	$y_{11} = \dfrac{8}{3^{2x} - \sin x};$
$y_{12} = \ln\left(\dfrac{3+2x}{4-5x^3}\right).$	$y_{12} = \sqrt{\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}}.$
Вариант № 7.21	Вариант № 7.22
$y_1 = \sqrt{x^3} - \dfrac{3}{2x^4} + 8x^5 - \dfrac{2}{x};$	$y_1 = 8x^3 - \sqrt[5]{x^7} - \dfrac{3}{x^4} - \dfrac{10}{\sqrt{x}};$
$y_2 = (4^x - 2x)\sin x - 3e^x\sqrt{x};$	$y_2 = (3 - 5x^2)\ln x - 3^x\, x^6;$
$y_3 = \dfrac{3x^2 - 4x}{e^x - x^4};$	$y_3 = \dfrac{x^5 - 4^x}{3\sqrt{x} + 5x};$
$y_4 = 5 \cdot 2^{3x+1};$	$y_4 = 2\operatorname{tg}(3 - 2x);$
$y_5 = (8x - 3x^2)^{16};$	$y_5 = (2x^2 - 3x + 5)^6;$
$y_6 = \operatorname{ctg} e^{3x^3 - 2x};$	$y_6 = \ln\cos(x^3 + 1);$
$y_7 = \sqrt{\ln(4x - 5x^6)};$	$y_7 = \sqrt[3]{\sin(3x^7 - 5x)};$
$y_8 = \arccos e^{x^2 - 8};$	$y_8 = \operatorname{ctg}(e^{6x} + 2x^8);$
$y_9 = \sin\sqrt{\ln 9x};$	$y_9 = \arcsin\sqrt{4^{7x+2}};$
$y_{10} = 5^{\operatorname{tg}^3 10x};$	$y_{10} = e^{\log_5 \cos 12x};$
$y_{11} = \dfrac{3}{\cos(4x-5) - 3\sqrt{x}};$	$y_{11} = \dfrac{7}{\sin e^x - 10x^2};$
$y_{12} = \operatorname{arcctg}\left(\dfrac{2+x^2}{2-x^2}\right).$	$y_{12} = \lg\left(\dfrac{4-\sqrt{5x}}{4+\sqrt{5x}}\right).$
Вариант № 7.23	Вариант № 7.24
$y_1 = 3\sqrt{x^5} - \dfrac{7}{x} + 6x^2 - \dfrac{4}{x^8};$	$y_1 = \dfrac{3}{x} - 8x^5 - \sqrt[7]{x^3} + \dfrac{4}{x^2};$
$y_2 = (\cos x + x^3)\, 4^x - \sqrt{x}\,\ln x;$	$y_2 = (\sqrt{x} - 2x^2)\ln x + e^x \operatorname{ctg} x;$
$y_3 = \dfrac{\sin x - 4x^3}{2x - 7x^8};$	$y_3 = \dfrac{6e^x - 4x}{x^5 - 7x^2};$
$y_4 = \operatorname{ctg}(8x - 7);$	$y_4 = \cos(1 - x^2);$
$y_5 = 6^{x^3 - 3x};$	$y_5 = (3x - 5 + 4x^3)^7;$
$y_6 = \cos^4(6x - 2);$	$y_6 = \operatorname{arctg}\sqrt[4]{6x - 10};$
$y_7 = \operatorname{arctg} e^{x^5 + 3x^2};$	$y_7 = 5^{\sin 2x + 3x^7};$
$y_8 = \sqrt[3]{\lg 7x - 4x^5};$	$y_8 = \ln\sqrt{\operatorname{tg} x - 2x^3};$
$y_9 = 8^{\operatorname{tg}\sqrt{3 - 10x^2}};$	$y_9 = \operatorname{ctg} 7^{\lg^3 x};$
$y_{10} = \sin\log_2 e^{\sqrt{x}};$	$y_{10} = e^{\sqrt{\arccos 9x^2}};$
$y_{11} = \dfrac{3}{6x^2 - \cos 3x};$	$y_{11} = \dfrac{4}{\operatorname{tg} 5x + 3\sin x};$

$y_{12} = \arcsin\left(\dfrac{5-e^{2x}}{5+e^{2x}}\right).$	$y_{12} = 2^{\frac{3-6x^2}{4x+8x^3}}.$
Вариант № 7.25	**Вариант № 7.26**
$y_1 = 2x^3 - 5\sqrt[3]{x^4} + \dfrac{6}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}};$	$y_1 = \dfrac{7}{3x} - \dfrac{x^3}{5} + \sqrt[7]{x^3} - \dfrac{5}{\sqrt{x}};$
$y_2 = (x^6 - 3^x)\sin x + 2x^4 e^x;$	$y_2 = (\operatorname{tg} x - 4)\,5^x + 3\sqrt{x}\ln x;$
$y_3 = \dfrac{2x^3 - x}{\sqrt{x} + 8x^4};$	$y_3 = \dfrac{\operatorname{ctg} x - 3^x}{6x^3 + e^x};$
$y_4 = 7^{\,2-3x};$	$y_4 = 2\sin(x^3 - 1);$
$y_5 = (4x^2 - 9x)^3;$	$y_5 = (3^x - 2x^3 - 3)^5;$
$y_6 = \sin 5^{4x^2-7x};$	$y_6 = \arcsin(e^{2x} + 3x^3);$
$y_7 = e^{\cos(3x-6x^3)};$	$y_7 = \sqrt[4]{3^{x^7-8x^2}};$
$y_8 = \sqrt{\lg 12x};$	$y_8 = \operatorname{tg}\log_2(6x - 9);$
$y_9 = \arcsin 6^{\operatorname{tg} x^4};$	$y_9 = \cos^3\sqrt{2x^2 - 4x};$
$y_{10} = \operatorname{ctg}^8\sqrt{5x^2 + 2};$	$y_{10} = 5^{\ln\sin 2x^4};$
$y_{11} = \dfrac{9}{e^{x^3} - 5\sqrt{x}};$	$y_{11} = \dfrac{1}{\arccos 4x + 3x^7};$
$y_{12} = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{3 - \ln x}{2 + 4\ln x}\right).$	$y_{12} = \operatorname{ctg}\left(\dfrac{7 - 5x^3}{8 + 4x}\right).$
Вариант № 7.27	**Вариант № 7.28**
$y_1 = -2x^3 + \dfrac{4}{x^2} - 3\sqrt{x^3} + 7\sqrt[4]{x^5};$	$y_1 = 4x^2 - \dfrac{3}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x^5} + 5\sqrt[5]{x^3};$
$y_2 = 3^x\cos x - 2\ln x\,(3 + \sqrt[3]{x^2});$	$y_2 = (1 + 9x^2)\operatorname{arctg} x - 3e^{\sqrt{x}};$
$y_3 = \dfrac{6^x - 3\sqrt{x}}{2x^3 + 11x};$	$y_3 = \dfrac{3 - 6\cos x}{4x^2 + 2^x};$
$y_4 = (3 - 2x^2 + x^3)^7;$	$y_4 = \sin(4x^2 + 5x);$
$y_5 = \operatorname{tg}(7x^2 - 2);$	$y_5 = \sqrt{e^x - 8x^3};$
$y_6 = 8^{\sin 2x + \sqrt{x}};$	$y_6 = (2x - \ln 3x)^5;$
$y_7 = \arccos\,\log_3(x^2 - 1);$	$y_7 = 10^{\sqrt{2x^2-4x+3}};$
$y_8 = \sqrt{\operatorname{ctg} 2x^4};$	$y_8 = e^{\cos(3x-7x^3)};$
$y_9 = e^{\arcsin\ln 6x};$	$y_9 = \log_4\sqrt{\operatorname{ctg} 14x};$
$y_{10} = \cos^4 9^{\sqrt[3]{x}};$	$y_{10} = \arcsin\,\operatorname{tg}^2 6x;$
$y_{11} = \dfrac{10}{\operatorname{ctg} 3x + 2^{\operatorname{tg} 3x}};$	$y_{11} = \dfrac{8}{10x + \sqrt{1 - 4x^3}};$
$y_{12} = \sin\left(\dfrac{1 - 5x}{4x^6 + 10x}\right).$	$y_{12} = \sqrt{\dfrac{3 + 4e^{2x}}{7 - 3e^{2x}}}.$

Задание 8. Используя методы дифференциального исчисления, провести исследование заданных функций и построить их графики.

Вариант № 8.1	Вариант № 8.2
$y_1 = x^3 - 3x^2 - 9x - 10;$ $y_2 = \dfrac{-x^2+3}{2x+4};\ \ y_3 = \dfrac{2x}{1-x^2}.$	$y_1 = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5;$ $y_2 = \dfrac{4x^2+20}{-x-2};\ \ y_3 = (x-1)e^x.$
Вариант № 8.3	**Вариант № 8.4**
$y_1 = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 9x + 5;$ $y_2 = \dfrac{-3x^2+8}{6x+11};\ \ y_3 = x\ln x.$	$y_1 = x^3 + 6x^2 + 9x + 2;$ $y_2 = \dfrac{2x^2-35}{3-x};\ \ y_3 = e^{1/(x-1)}.$
Вариант № 8.5	**Вариант № 8.6**
$y_1 = 2x^3 + 9x^2 + 12x + 7;$ $y_2 = \dfrac{-5x^2-5}{-4x-3};\ \ y_3 = \dfrac{2x}{1+x^2}.$	$y_1 = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 12x - 7;$ $y_2 = \dfrac{-2x^2+2}{-3x+5};\ \ y_3 = \dfrac{x}{e^x}.$
Вариант № 8.7	**Вариант № 8.8**
$y_1 = x^3 - 6x^2 + 9x + 1;$ $y_2 = \dfrac{-4x^2+24}{2x+5};\ \ y_3 = \dfrac{4+x}{x^2}.$	$y_1 = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 20;$ $y_2 = \dfrac{3x^2-9}{-4x-8};\ \ y_3 = \dfrac{1}{x^2}\,e^{1/x}.$
Вариант № 8.9	**Вариант № 8.10**
$y_1 = \frac{1}{2}x^3 + \frac{15}{4}x^2 + 9x + 8;$ $y_2 = \dfrac{2x^2-40}{x-6};\ \ y_3 = x^2(x-4)^2.$	$y_1 = x^3 + 3x^2 - 9x + 1;$ $y_2 = \dfrac{5x^2+15}{-x-1};\ \ y_3 = \dfrac{\ln x}{x}.$
Вариант № 8.11	**Вариант № 8.12**
$y_1 = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 32;$ $y_2 = \dfrac{-x^2+12}{5x+4};\ \ y_3 = e^{2x-x^2}.$	$y_1 = \frac{2}{3}x^3 - 5x^2 + 8x + 1;$ $y_2 = \dfrac{4x^2+12}{-3x-3};\ \ y_3 = \dfrac{x^3}{x^2-4}.$
Вариант № 8.13	**Вариант № 8.14**
$y_1 = x^3 + 9x^2 + 15x - 9;$ $y_2 = \dfrac{-2x^2+7}{4x+6};\ \ y_3 = \dfrac{2x}{2+x^3}.$	$y_1 = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8;$ $y_2 = \dfrac{3x^2-4}{8x-5};\ \ y_3 = \dfrac{x}{e^{x^2/2}}.$
Вариант № 8.15	**Вариант № 8.16**
$y_1 = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{8}x^2 - 3x + 7;$ $y_2 = \dfrac{6-5x^2}{1+2x};\ \ y_3 = \ln\sqrt{x^2+1}.$	$y_1 = x^3 - 3x^2 - 24x + 26;$ $y_2 = \dfrac{-x^2}{-7x+14};\ \ y_3 = \dfrac{x^3+1}{x^3-1}.$
Вариант № 8.17	**Вариант № 8.18**
$y_1 = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5;$	$y_1 = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 8x - 17;$

$y_2=\dfrac{-4x^2+12}{x-2}$; $y_3=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.	$y_2=\dfrac{10-2x^2}{9-3x}$; $y_3=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$.
Вариант №8.19	Вариант №8.20
$y_1=x^3+9x^2+24x+17$; $y_2=\dfrac{-3x^2+15}{-x-3}$; $y_3=\dfrac{e^{1/x^2}}{x}$.	$y_1=2x^3+6x^2-48x+9$; $y_2=\dfrac{5x^2-7}{-5x+4}$; $y_3=\dfrac{\ln x}{x^2}$.
Вариант №8.21	Вариант №8.22
$y_1=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x-6$; $y_2=\dfrac{-x^2-4}{4x+6}$; $y_3=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.	$y_1=x^3-6x^2-15x+8$; $y_2=\dfrac{4x^2-12}{5x-10}$; $y_3=\dfrac{x+1}{e^x}$.
Вариант №8.23	Вариант №8.24
$y_1=2x^3+15x^2+24x-2$; $y_2=\dfrac{-3x^2+6}{-2x+3}$; $y_3=\ln\dfrac{x}{x-1}$.	$y_1=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}x^2-12x+13$; $y_2=\dfrac{2x^2-4}{6x+9}$; $y_3=(x-1)\sqrt{x}$.
Вариант №8.25	Вариант №8.26
$y_1=x^3+3x^2-24x+9$; $y_2=\dfrac{15-5x^2}{3x-6}$; $y_3=\dfrac{e^{1/x^2}}{x^2}$.	$y_1=2x^3-21x^2+36x-10$; $y_2=\dfrac{x^2-3}{-5x+10}$; $y_3=\dfrac{x}{x^2-4}$.
Вариант №8.27	Вариант №8.28
$y_1=\frac{1}{3}x^3+x^2-8x-7$; $y_2=\dfrac{4x^2-6}{-2x-1}$; $y_3=\dfrac{x}{\ln x}$.	$y_1=x^3-9x^2-21x+12$; $y_2=\dfrac{3x^2+15}{-5x-10}$; $y_3=x\,e^{1/x}$.

А.5. Дифференциальное исчисление функций многих переменных

Задание 9. Для заданной функции двух независимых переменных $z=f(x,y)$ найти полный дифференциал dz и производную функции z'_{AB} по направлению вектора $\overline{AB}$. Вычислить градиент этой функции $\operatorname{grad} z$ в точке A.

9.1	$z=\sqrt{3x^2+3y^3}+2xy^4-9x$; $A(2,1)$; $B(1,0)$.
9.2	$z=\operatorname{arctg}(7x^4-6y)+6x^2y^2+5y$; $A(2,-1)$; $B(1,2)$.
9.3	$z=\operatorname{arcctg}(4x+5y^2)-x^3y-8x$; $A(2,-2)$; $B(0,-1)$.
9.4	$z=2^{x-2y^2}-3x^2y^3+3y$; $A(-3,-1)$; $B(5,0)$.
9.5	$z=\operatorname{ctg}(3x^2-5y^3)+5xy^2+7x$; $A(3,-2)$; $B(-2,-1)$.
9.6	$z=3^{-x^2+y}-3x^2y+3y$; $A(-4,3)$; $B(0,1)$.

9.7	$z = \sin(3x^3 - 2y^2) - 4xy^2 + 7x\,;\quad A(-1,4)\,;\ B(-2,-4)\,.$
9.8	$z = e^{3x^2-2y} - 5x^3y + y\,;\quad A(-1,1)\,;\ B(0,-1)\,.$
9.9	$z = \ln(2x^3 + 9y^3) + 8x^2y^3 + 7x\,;\quad A(1,-1)\,;\ B(-1,1)\,.$
9.10	$z = \cos(3x^2 - 6y) - x^2y^4 - 6y\,;\quad A(-3,-1)\,;\ B(3,1)\,.$
9.11	$z = \sqrt{x^5 - 4y^2} + 9x^{-2}y^3 - 9x\,;\quad A(6,2)\,;\ B(6,-1)\,.$
9.12	$z = 2^{5x^{-3}-3y^3} + 4x^2y^{-3} - 2y\,;\quad A(3,4)\,;\ B(5,2)\,.$
9.13	$z = \mathrm{arctg}(3x^{-5} + y^5) - 7x^2y^{-3} - x\,;\quad A(3,-2)\,;\ B(1,-1)\,.$
9.14	$z = \cos(x - 2y^2) + 9x^{-3}y^2 - 8y\,;\quad A(-1,1)\,;\ B(2,6)\,.$
9.15	$z = \mathrm{tg}(3x - 4y^2) - 5x^{-4}y^2 + x\,;\quad A(2,-1)\,;\ B(-3,-1)\,.$
9.16	$z = e^{2x^5-6y^4} - x^2y + 5y\,;\quad A(0,-2)\,;\ B(-3,-4)\,.$
9.17	$z = \sqrt[3]{3x^2 + 3y^2} - 5x^{-2}y^3 - 2x\,;\quad A(2,3)\,;\ B(3,-2)\,.$
9.18	$z = 2^{4x^{-3}-8y^2} - 9x^2y^{-3} - 6y\,;\quad A(2,2)\,;\ B(-1,-4)\,.$
9.19	$z = \mathrm{tg}(5x^2 + 4y) + 4x^{-2}y^3 + 3x\,;\quad A(1,-2)\,;\ B(-2,-1)\,.$
9.20	$z = \mathrm{arctg}(x + y^{-2}) - 3x^2y^{-5} + y\,;\quad A(0,-5)\,;\ B(-2,-4)\,.$
9.21	$z = \ln(3x^3 - 6y^3) - 8x^3y^{-4} + 5x\,;\quad A(1,-2)\,;\ B(-1,-3)\,.$
9.22	$z = \mathrm{arcctg}(5x^2 - 8y^3) + 3xy^2 + 9y\,;\quad A(1,-2)\,;\ B(0,1)\,.$
9.23	$z = \sqrt[3]{2x - 2y^5} + 2x^3y^3 - 6x\,;\quad A(0,-3)\,;\ B(-1,-2)\,.$
9.24	$z = \mathrm{tg}(x^{-5} + 9y) - 3x^3y^{-5} - 9y\,;\quad A(-1,-3)\,;\ B(1,4)\,.$
9.25	$z = \sin(2x^2 - 2y^3) + 8x^{-2}y^{-2} - 8x\,;\quad A(3,-2)\,;\ B(-1,2)\,.$
9.26	$z = 3^{2x^3-y^5} - 9x^5y^{-5} - 6y\,;\quad A(-3,4)\,;\ B(1,4)\,.$
9.27	$z = \ln(4x + 5y^3) + 8xy + x\,;\quad A(0,-2)\,;\ B(2,1)\,.$
9.28	$z = \mathrm{ctg}(x^3 + 8y) + 7x^{-3}y^2 - 2y\,;\quad A(3,-2)\,;\ B(2,2)\,.$

Задание 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x,y)$ в замкнутой области D, заданной системой неравенств.
Указание. Все полученные линии и характерные точки изобразить в системе координат xOy.

10.1	$z = x^2 + 3y^2 + x - 8y;\quad x \leqslant 0;\ y \geqslant 1;\ 3x - 2y \geqslant -6.$
10.2	$z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 2y;\quad x \geqslant 0;\ y \geqslant 4;\ 3x + 4y \leqslant 24.$
10.3	$z = 2xy + x^2 - 2y^2 - 10;\quad x \geqslant 0;\ y \geqslant 4;\ \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}y \leqslant 1.$
10.4	$z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x;\quad x \geqslant -2;\ y \geqslant -2;\ x + y \leqslant -1.$
10.5	$z = x^2 + 5xy - 5y^2;\quad x \geqslant 0;\ y \leqslant 0;\ x - 3y \leqslant 3.$

10.6	$z = x^2 + 3xy + 2y^2 - 4;\quad x \leqslant 0;\ y \geqslant 0;\ x - 2y \geqslant -2.$
10.7	$z = x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x;\quad x \leqslant \frac{5}{2};\ y \geqslant -2;\ 2x - 2y \geqslant 5.$
10.8	$z = 3y + 2x^2 - xy - y^2;\quad x \geqslant 0;\ y \geqslant 1;\ x + y \leqslant 2.$
10.9	$z = x^2 + 2y^2 - 6x - 12;\quad x \geqslant 2;\ x - \frac{5}{3}y \leqslant 5;\ x + \frac{5}{2}y \leqslant 5.$
10.10	$z = 6x^2 + 6xy - y^2 - 2y + 1;\quad x \geqslant 0;\ y \leqslant 0;\ x - y \leqslant 1.$
10.11	$z = x^2 + 3y^2 + 3x - 4y - 2;\quad x \leqslant 2;\ 3y \leqslant 1;\ y \geqslant -x.$
10.12	$z = 2x^2 - 2xy + 5y^2 + 2x;\quad x \leqslant 0;\ y \leqslant 0;\ x + y \geqslant -1.$
10.13	$z = 7xy - 2x^2 + 4y - 10;\quad x \geqslant -3;\ y \geqslant -3;\ x + y \leqslant -1.$
10.14	$z = 7x^2 + 6xy + 3y^2 - 5x;\quad x \leqslant 1;\ y \geqslant -1;\ x - y \geqslant 1.$
10.15	$z = 3x^2 - 2xy + 6y^2 - 7;\quad x \leqslant 0;\ y \geqslant -4;\ 2x - 3y \geqslant 8.$
10.16	$z = 4x^2 - 4xy + 5y^2 + 3;\quad x \leqslant 2;\ y \leqslant 3;\ x + y \geqslant 2.$
10.17	$z = 2x^2 + 5xy - 2y^2 + 4y;\quad x \leqslant 2;\ y \geqslant 2;\ y - x \leqslant 3.$
10.18	$z = 3 + x^2 - 4xy + y^2 - 3y;\quad x \geqslant -3;\ y \leqslant -\frac{1}{2};\ y - x \geqslant \frac{1}{2}.$
10.19	$z = x^2 + 3y^2 - 4x + 6;\quad x \geqslant 1;\ y \leqslant 1;\ x - y \leqslant 3.$
10.20	$z = 6x^2 + 2y^2 - 8x + 4y;\quad x \geqslant -1;\ y \leqslant 0;\ y \geqslant x - 1.$
10.21	$z = x^2 + 3y^2 + 7x - 6y - 4;\quad x \leqslant -1;\ y \geqslant 1;\ y - x \leqslant \frac{9}{2}.$
10.22	$z = 4xy - 2x^2 - 2y + 5;\quad x \geqslant -3;\ y \leqslant 3;\ x - y \leqslant 4.$
10.23	$z = -x^2 + 4xy + 5y^2 + 2x;\quad x \geqslant 1;\ y \leqslant 0;\ x - y \leqslant 2.$
10.24	$z = 3y^2 - 5xy + x^2;\quad x \geqslant 1;\ y \leqslant 3;\ x - y \leqslant 4.$
10.25	$z = 2x^2 + 9xy - 5y^2;\quad x \geqslant 0;\ y \leqslant 0;\ x - y \leqslant 1.$
10.26	$z = -x^2 + 6xy + y^2 - y;\quad x \geqslant 0;\ y \leqslant 0;\ 2x - 4y \leqslant 1.$
10.27	$z = 7x^2 - 5y^2 - 3y;\quad x + y \geqslant -1;\ x - y \leqslant 1;\ y \leqslant 0.$
10.28	$z = -2x^2 + 3xy + y^2 - x;\quad x \geqslant -1;\ y \leqslant 2;\ -x + y \geqslant 1.$

А.6. Интегральное исчисление функций одной переменной

Задание 11. Найти неопределенные интегралы от указанных функций $\int y(x)\,dx$.

Вариант № 11.1	Вариант № 11.2
$y_1 = 5x^4 - \dfrac{2}{3x} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\,;$	$y_1 = \dfrac{3}{x^2} + 5^x - 7\sqrt[9]{x}\,;$

$y_2 = \sin\left(6x - 8\right)$;	$y_2 = \dfrac{1}{9x - 3}$;
$y_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3x + 7}}$;	$y_3 = e^{12x+7}$;
$y_4 = 2x\sqrt{3x^2 + 4}$;	$y_4 = \sqrt{6 - 9x}$;
$y_5 = \dfrac{1 - 2\operatorname{ctg} 2x}{\sin^2 2x}$;	$y_5 = \sin^5 x \cos x$;
$y_6 = \dfrac{2x - 1}{\sqrt{x^2 + 4}}$;	$y_6 = \dfrac{4x - 3}{\sqrt{x^2 + 5}}$;
$y_7 = \dfrac{3x - 8}{x^2 + 12x + 37}$;	$y_7 = \dfrac{x + 8}{x^2 + 4x + 5}$;
$y_8 = \dfrac{3^x}{\sqrt{4 + 3^{2x}}}$;	$y_8 = 8x\, e^{x^2}$;
$y_9 = \dfrac{\sin\sqrt{x}}{5\sqrt{x}}$;	$y_9 = \dfrac{1}{x\left(\ln x + 5\right)^4}$;
$y_{10} = \left(2x - 4\right) e^{-7x}$;	$y_{10} = \left(x^2 + 3\right)\ln x$;
$y_{11} = \dfrac{x^2 - 3}{(x - 1)(x^2 + 1)}$;	$y_{11} = \dfrac{2x + 5}{(x^2 - 1)(x + 2)}$;
$y_{12} = \sin 4x \cos 5x$;	$y_{12} = \sin 3x \cos 4x$;
$y_{13} = \left(3x^2 - 6\right)\sin x$.	$y_{13} = 2x^2\cos(3 - 4x)$.
Вариант № 11.3	Вариант № 11.4
$y_1 = 2x - \dfrac{4}{x} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$;	$y_1 = \dfrac{4}{x} - 2^x + \sqrt[3]{x^2}$;
$y_2 = \cos\left(2 - 9x\right)$;	$y_2 = \dfrac{1}{\cos^2\left(5x + 3\right)}$;
$y_3 = \left(7x + 4\right)^5$;	$y_3 = 6^{1-8x}$;
$y_4 = \dfrac{5\operatorname{tg} 3x + 1}{\cos^2 3x}$;	$y_4 = \dfrac{x^2}{\sqrt{2x^3 + 3}}$;
$y_5 = \dfrac{1}{x\ln^2 x}$;	$y_5 = \dfrac{\arcsin^{11} x}{\sqrt{1 - x^2}}$;
$y_6 = \dfrac{x + 4}{\sqrt{1 - x^2}}$;	$y_6 = \dfrac{x + 4}{x^2 + 9}$;
$y_7 = \dfrac{5x - 1}{x^2 + 14x + 40}$;	$y_7 = \dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 6x + 2}}$;
$y_8 = \left(1 + e^x\right)^7 e^x$;	$y_8 = \left(2 + 3x^2\right)^{10} x$;
$y_9 = \dfrac{x^5}{6 - x^6}$;	$y_9 = \dfrac{e^{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}$;

$y_{10} = x\sin(2x-1)$;	$y_{10} = x^3\ln x$;
$y_{11} = \dfrac{x-1}{(x-2)(x^2+1)}$;	$y_{11} = \dfrac{x^2+x+2}{(x-2)(x^2+3)}$;
$y_{12} = \sin x\cos 5x$;	$y_{12} = \sin 2x\sin 3x$;
$y_{13} = (4x^2+3)\sin(x+7)$.	$y_{13} = (2+x^2)e^{-x}$.
Вариант № 11.5	**Вариант № 11.6**
$y_1 = 2x^3 - \dfrac{5}{x} + \dfrac{3}{\sqrt[4]{x}}$;	$y_1 = 7x^4 - 3^x + \dfrac{2}{\sqrt[5]{x^3}}$;
$y_2 = \dfrac{6}{3x-5}$;	$y_2 = e^{13-2x}$;
$y_3 = \dfrac{\ln^8 x}{x}$;	$y_3 = x\sqrt{1+2x^2}$;
$y_4 = 2x\sqrt{2x^2+3}$;	$y_4 = \dfrac{1}{\cos^2\left(1-\frac{3x}{2}\right)}$;
$y_5 = \dfrac{1}{\sin^2(4x-3)}$;	$y_5 = \dfrac{\ln^7 x}{2x}$;
$y_6 = \dfrac{x+1}{x^2-25}$;	$y_6 = \dfrac{3x+2}{\sqrt{4-x^2}}$;
$y_7 = \dfrac{2x-8}{x^2+14x+50}$;	$y_7 = \dfrac{4x-5}{x^2+12x+20}$;
$y_8 = \dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}}$;	$y_8 = \dfrac{\sin x}{1+\cos^2 x}$;
$y_9 = \dfrac{\sin\ln x}{x}$;	$y_9 = \dfrac{8^x}{2-8^{2x}}$
$y_{10} = (x+4)\sin 7x$;	$y_{10} = (1+8x)\,e^{-3x}$;
$y_{11} = \dfrac{1-x}{(x+1)(x^2+3)}$;	$y_{11} = \dfrac{2x-3}{(x^2+4)(2x-1)}$;
$y_{12} = \sin^4 3x\cos^3 3x$;	$y_{12} = \sin^5 5x\cos^2 5x$;
$y_{13} = (x^2+5)\sin 3x$.	$y_{13} = (3x^2+2)\sin(x+8)$.
Вариант № 11.7	**Вариант № 11.8**
$y_1 = 3x^3 - \dfrac{2}{\sqrt{x}} + 6$;	$y_1 = 8x - 3^x + \dfrac{4}{\sqrt[4]{x}}$;
$y_2 = \dfrac{1}{\sin^2 16x}$;	$y_2 = \dfrac{3}{2x^2+4}$;
$y_3 = \dfrac{3}{\sqrt{4-2x}}$;	$y_3 = \cos(3x-10)$;
$y_4 = \dfrac{6\ln x - 5}{x}$;	$y_4 = \dfrac{\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{1-x^2}}$;

$y_5 = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$;	$y_5 = \dfrac{2x^3}{3x^4+1}$;
$y_6 = \dfrac{5-4x}{x^2+1}$;	$y_6 = \dfrac{6x+7}{\sqrt{x^2+3}}$;
$y_7 = \dfrac{8x-1}{x^2+6x+12}$;	$y_7 = \dfrac{4x-2}{\sqrt{x^2+10x-5}}$;
$y_8 = \dfrac{7x}{1+8x^2}$;	$y_8 = 3^{4x^2+6x}\,(8x+6)$;
$y_9 = e^{x^4+10}x^3$;	$y_9 = \dfrac{5^x}{\sqrt{9-5^{2x}}}$;
$y_{10} = (2-x)\,e^{-4x}$;	$y_{10} = (3x+2)\cos 4x$;
$y_{11} = \dfrac{3-x^2}{(x^2-1)(x+2)}$;	$y_{11} = \dfrac{x^2+4}{x(x+1)(x+2)}$;
$y_{12} = \cos 4x \cos 7x$;	$y_{12} = \cos 6x \cos 2x$;
$y_{13} = (3-4x^2)\cos(x-4)$.	$y_{13} = (x^2+7)\sin 2x$.

Вариант № 11.9	Вариант № 11.10
$y_1 = 4 - \dfrac{1}{x^3} + 6\sqrt[5]{x^4}$;	$y_1 = 6x - 5^x - \dfrac{8}{\sqrt[3]{x}}$;
$y_2 = \sin(2-5x)$;	$y_2 = e^{3-2x}$;
$y_3 = \dfrac{7}{\sqrt{1-3x^2}}$;	$y_3 = \dfrac{2}{3+x}$;
$y_4 = \dfrac{x}{3+2x^2}$;	$y_4 = \dfrac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}$;
$y_5 = \dfrac{1}{\cos^2 x\,(2\operatorname{tg} x+3)}$;	$y_5 = \dfrac{x^3}{5-2x^4}$;
$y_6 = \dfrac{4x+6}{x^2-36}$;	$y_6 = \dfrac{1-3x}{\sqrt{9-x^2}}$;
$y_7 = \dfrac{2x-8}{x^2+2x+7}$;	$y_7 = \dfrac{3x+3}{x^2-16x+15}$;
$y_8 = e^{5x^3-4}x^2$;	$y_8 = \dfrac{2^{\ln x}}{x}$;
$y_9 = \dfrac{\cos x^{-2}}{x^3}$;	$y_9 = \dfrac{e^{x/2}}{\sqrt{16-e^x}}$;
$y_{10} = (4-x)\,e^{2x}$;	$y_{10} = (2x-7)\sin 5x$;
$y_{11} = \dfrac{x-3}{(x-2)(x^2+1)}$;	$y_{11} = \dfrac{x-1}{(x+1)(x^2+2)}$;
$y_{12} = \sin 5x \cos 6x$;	$y_{12} = \sin 6x \sin 4x$;
$y_{13} = (2x^2+8)\cos(1-3x)$.	$y_{13} = (2x^2+3)\sin 4x$.

Вариант № 11.11	Вариант № 11.12
$y_1 = 3x^2 - \dfrac{7}{x} + \dfrac{1}{\sqrt[9]{x^5}}\,;$	$y_1 = 2x + 4^x - \dfrac{3}{\sqrt[5]{x^2}}\,;$
$y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}}\,;$	$y_2 = \sqrt{5x-7}\,;$
$y_3 = \dfrac{1}{\sin^2(2x-1)}\,;$	$y_3 = \dfrac{4x}{9-x^2}\,;$
$y_4 = \dfrac{\arcsin^7 x}{\sqrt{1-x^2}}\,;$	$y_4 = \dfrac{1}{x\ln^4 x}\,;$
$y_5 = \dfrac{x^4}{\sqrt{1-2x^5}}\,;$	$y_5 = \dfrac{\cos x}{\sqrt{1+3\sin x}}\,;$
$y_6 = \dfrac{3x+9}{x^2+16}\,;$	$y_6 = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+3}}\,;$
$y_7 = \dfrac{x-4}{x^2+6x+19}\,;$	$y_7 = \dfrac{3x+5}{\sqrt{x^2+8x-5}}\,;$
$y_8 = xe^{-3x^2}\,;$	$y_8 = e^{x^4}x^3\,;$
$y_9 = \dfrac{(\ln x+6)^{10}}{x}\,;$	$y_9 = 3^{x^2-3x}(2x-3)\,;$
$y_{10} = (3x+15)\cos 6x\,;$	$y_{10} = (2x-4)\,e^{-6x}\,;$
$y_{11} = \dfrac{5x-3}{(x+1)(9-x^2)}\,;$	$y_{11} = \dfrac{1-2x}{(x^2-4)(x+1)}\,;$
$y_{12} = \sin^4 x\cos^6 x\,;$	$y_{12} = \dfrac{3+\cos 8x}{\sin^2 8x}\,;$
$y_{13} = (6-x^2)e^{-3x}\,.$	$y_{13} = (x^2+9)\sin 3x\,.$

Вариант № 11.13	Вариант № 11.14
$y_1 = 8\sqrt[3]{x} - \dfrac{7}{x^{15}} - 4x\,;$	$y_1 = 4^x - \dfrac{5}{x^2} + \sqrt{x}\,;$
$y_2 = e^{2-15x}\,;$	$y_2 = \dfrac{1}{(2x-3)^3}\,;$
$y_3 = \dfrac{1}{\sqrt[7]{3x+2}}\,;$	$y_3 = 5^{3x-2}\,;$
$y_4 = \dfrac{1}{x\ln^3 x}\,;$	$y_4 = e^{6-3x^3}x^2\,;$
$y_5 = \dfrac{\operatorname{tg}^{20} x}{\cos^2 x}\,;$	$y_5 = \dfrac{\cos x}{\sin^5 x}\,;$
$y_6 = \dfrac{x+2}{x^2-25}\,;$	$y_6 = \dfrac{3x+5}{x^2+16}\,;$
$y_7 = \dfrac{2-x}{x^2+8x-9}\,;$	$y_7 = \dfrac{x+3}{x^2+4x+6}\,;$

$y_8 = \dfrac{7e^x}{8 - e^x}$;	$y_8 = \dfrac{\ln^9 x}{x}$;
$y_9 = \dfrac{x}{x^2 - 6}$;	$y_9 = 6x^2\sqrt{x^3 - 1}$;
$y_{10} = x^5 \ln x$;	$y_{10} = (5x - 2)\sin 3x$;
$y_{11} = \dfrac{x - 3}{(x-1)(x^2+2)}$;	$y_{11} = \dfrac{x - 2}{(x^2+1)(x+1)}$;
$y_{12} = \sin^3 7x \cos^4 7x$;	$y_{12} = \cos x \cos 7x$;
$y_{13} = (x^2 - 4)e^{5x}$.	$y_{13} = (3 + x^2)e^{1-x}$.
Вариант № 11.15	Вариант № 11.16
$y_1 = 3x^7 + \dfrac{10}{x^4} - 3\sqrt{x^9}$;	$y_1 = 5x^7 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + 7^x$;
$y_2 = \sqrt{3x + 1}$;	$y_2 = \sin\left(4x - 15\right)$;
$y_3 = \dfrac{1}{5 - 4x}$;	$y_3 = \dfrac{1}{(2 - 3x)^{10}}$;
$y_4 = \dfrac{e^x}{3 + 4e^x}$;	$y_4 = \dfrac{x}{1 + x^2}$;
$y_5 = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x + 9}$;	$y_5 = \dfrac{\cos x}{\sqrt{\sin x + 2}}$;
$y_6 = \dfrac{x + 1}{x^2 - 49}$;	$y_6 = \dfrac{2x + 4}{\sqrt{x^2 + 9}}$;
$y_7 = \dfrac{7 - 8x}{\sqrt{x^2 + 6x + 1}}$;	$y_7 = \dfrac{x - 2}{x^2 - 6x + 12}$;
$y_8 = x\sin\left(3x^2\right)$;	$y_8 = \dfrac{1}{(x+2)\ln^4(x+2)}$;
$y_9 = \dfrac{3^{\sqrt{x}-4}}{7\sqrt{x}}$;	$y_9 = \dfrac{3^x}{10 - 3^{2x}}$;
$y_{10} = \operatorname{arctg} 5x$;	$y_{10} = x\sin\left(2x + 1\right)$;
$y_{11} = \dfrac{x^2 + 4}{(x-1)(x^2+2)}$;	$y_{11} = \dfrac{x - 13}{(x^2+6)(2x-1)}$;
$y_{12} = \sin 7x \cos 3x$;	$y_{12} = \dfrac{3 + 4\sin^2 6x}{\cos^2 6x}$;
$y_{13} = (8 + x^2)e^{4-x}$.	$y_{13} = (3 - x^2)\cos(5x - 1)$.
Вариант № 11.17	Вариант № 11.18
$y_1 = 3x + \dfrac{12}{x^3} - \sqrt[7]{x^5}$;	$y_1 = x^3 - \dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2}} + 3^x$;
$y_2 = \dfrac{1}{(5x + 2)^{12}}$;	$y_2 = \cos\left(7x - 3\right)$;

$y_3 = \dfrac{1}{\sin^2(1-7x)}$;	$y_3 = \sqrt[5]{3x+2}$;
$y_4 = e^{x^5+6}x^4$;	$y_4 = \dfrac{\operatorname{arctg}^9 x}{5(1+x^2)}$;
$y_5 = \dfrac{\sqrt{5+2\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}$;	$y_5 = \sin^8 x \cos x$;
$y_6 = \dfrac{3x+5}{x^2+19}$;	$y_6 = \dfrac{x-5}{\sqrt{x^2+16}}$;
$y_7 = \dfrac{x-3}{x^2+2x+5}$;	$y_7 = \dfrac{5x-4}{x^2+6x+5}$;
$y_8 = \dfrac{x}{(1+x^2)^7}$;	$y_8 = 7^{x^3+2x}\left(3x^2+2\right)$;
$y_9 = \dfrac{5^{2/x}}{x^2}$;	$y_9 = x^5\left(7x^6-12\right)^{10}$;
$y_{10} = x^{10}\ln x$;	$y_{10} = (4-2x)\,e^{5x}$;
$y_{11} = \dfrac{-7-x^2}{(x^2+5)(x+1)}$;	$y_{11} = \dfrac{-2x^2-3}{(x^2+6)(x+1)}$;
$y_{12} = \dfrac{\cos^2 4x+4}{\sin^2 4x}$;	$y_{12} = \dfrac{4\cos^2 2x+5}{\sin^2 2x}$;
$y_{13} = (x^2-2)e^{3x}$.	$y_{13} = (3+2x^2)\cos(2x+7)$.

Вариант № 11.19	Вариант № 11.20
$y_1 = \dfrac{x^3}{7} + \dfrac{5}{x^4} + \sqrt[3]{x^4}$;	$y_1 = x - 5^x + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$;
$y_2 = \sqrt[3]{(3x+2)^2}$;	$y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}}$;
$y_3 = e^{7x+9}$;	$y_3 = \dfrac{1}{\cos^2(5x+12)}$;
$y_4 = x\sqrt{x^2+5}$;	$y_4 = \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$;
$y_5 = \dfrac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$;	$y_5 = \dfrac{\sin 2x}{4+\cos 2x}$;
$y_6 = \dfrac{x+1}{x^2+2}$;	$y_6 = \dfrac{7x+5}{\sqrt{9-x^2}}$;
$y_7 = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4x+10}}$;	$y_7 = \dfrac{x+1}{x^2-6x+10}$;
$y_8 = \dfrac{\arcsin^6 x}{\sqrt{1-x^2}}$;	$y_8 = \dfrac{1}{x\ln^3 x}$;
$y_9 = \dfrac{\ln^6(x+3)}{x+3}$;	$y_9 = 3x^3\sqrt{1-x^4}$;
$y_{10} = \arcsin 2x$;	$y_{10} = (9x+4)\cos 6x$;

$y_{11} = \dfrac{-2x-7}{(x^2+2)(x-3)}$;	$y_{11} = \dfrac{x^2+7}{(x^2-9)(x+5)}$;
$y_{12} = \sqrt[5]{\sin^4 3x}\cos^3 3x$;	$y_{12} = \dfrac{\cos^2 5x - 1}{\sin^2 5x}$;
$y_{13} = (x^2-2)\cos(1-2x)$.	$y_{13} = (x^2+1)\sin(2x-3)$.
Вариант № 11.21	**Вариант № 11.22**
$y_1 = \sqrt[3]{x^8} - \dfrac{3}{x^2} + 6x$;	$y_1 = \sqrt{x} + \dfrac{7}{4\sqrt[3]{x}} - 2^x$;
$y_2 = \dfrac{1}{(1-13x)^{15}}$;	$y_2 = \sin(-3x)$;
$y_3 = 2^{3x-11}$;	$y_3 = \dfrac{1}{16+(8x+3)^2}$;
$y_4 = x^2\sqrt{x^3-7}$;	$y_4 = \dfrac{\ln^4 x}{2x}$;
$y_5 = \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}$;	$y_5 = e^{\operatorname{ctg} x}\dfrac{5}{\sin^2 x}$;
$y_6 = \dfrac{7x-1}{x^2-9}$;	$y_6 = \dfrac{x+3}{\sqrt{16-x^2}}$;
$y_7 = \dfrac{x+5}{x^2+8x+19}$;	$y_7 = \dfrac{x-9}{x^2+10x+24}$;
$y_8 = \dfrac{8^x}{\sqrt{1-8^{2x}}}$;	$y_8 = x^4\sqrt{1-5x^5}$;
$y_9 = x\left(2x^2+5\right)^9$;	$y_9 = \dfrac{x^3}{x^8-2}$;
$y_{10} = x^7 \ln x$;	$y_{10} = 3xe^{-x}$;
$y_{11} = \dfrac{3-x}{(x+1)(x^2+1)}$;	$y_{11} = \dfrac{2x^2-7}{(x^2+1)(x-4)}$;
$y_{12} = \sqrt[3]{\sin^2 4x}\cos^3 4x$;	$y_{12} = \sin^4 3x$;
$y_{13} = (4+x^2)e^{-3x}$.	$y_{13} = (3x^2+1)\sin(1-2x)$.
Вариант № 11.23	**Вариант № 11.24**
$y_1 = 6x^2 - \dfrac{4}{x^3} + \sqrt[5]{x^3}$;	$y_1 = \dfrac{7^x}{3} - \dfrac{3}{\sqrt{x^5}} + 2\sqrt{x}$;
$y_2 = \dfrac{1}{2-5x}$;	$y_2 = 3^{6x+1}$;
$y_3 = \dfrac{e^x}{1+2e^x}$;	$y_3 = \dfrac{1}{\sin^2(6x+2)}$;
$y_4 = \dfrac{3x^2}{2-x^3}$;	$y_4 = x\sqrt[3]{5+x^2}$;

$y_5 = \dfrac{\cos x}{\sqrt{4\sin x + 3}}$;	$y_5 = \dfrac{\arcsin^7 x}{\sqrt{1-x^2}}$;
$y_6 = \dfrac{x+2}{x^2+4}$;	$y_6 = \dfrac{4-x}{x^2-9}$;
$y_7 = \dfrac{3x+1}{x^2-8x+25}$;	$y_7 = \dfrac{5x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}}$;
$y_8 = \dfrac{\operatorname{arctg}^5 x}{1+x^2}$;	$y_8 = \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}$;
$y_9 = \dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$;	$y_9 = \dfrac{e^{\sqrt{x}+5}}{\sqrt{x}}$;
$y_{10} = \arccos 6x$;	$y_{10} = (4-x)\cos 7x$;
$y_{11} = \dfrac{x+14}{x(x+7)}$;	$y_{11} = \dfrac{x+3}{x(1-x^2)}$;
$y_{12} = \cos^4 4x$;	$y_{12} = \sin 4x \sin 8x$;
$y_{13} = (1-2x^2)\cos(3x-1)$.	$y_{13} = (2x^2-5)e^{2x}$.
Вариант № 11.25	**Вариант № 11.26**
$y_1 = 8x - \dfrac{2}{x^3} - 4\sqrt[4]{x}$;	$y_1 = 2x^5 - \dfrac{4}{3x^2} - \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$;
$y_2 = \dfrac{1}{\sqrt{4-8x}}$;	$y_2 = \operatorname{ctg}(6-3x)$;
$y_3 = xe^{1-2x^2}$;	$y_3 = \dfrac{4}{\sqrt{3-7x}}$;
$y_4 = \dfrac{1}{x\ln^{10} x}$;	$y_4 = x^4\sqrt{2x^5-6}$;
$y_5 = \dfrac{\sin x}{\cos x + 5}$;	$y_5 = \dfrac{2+\operatorname{tg} 3x}{\cos^2 3x}$;
$y_6 = \dfrac{2x+4}{\sqrt{25-x^2}}$;	$y_6 = \dfrac{5x+6}{\sqrt{x^2+4}}$;
$y_7 = \dfrac{x-3}{x^2+4x+7}$;	$y_7 = \dfrac{2x+4}{x^2+12x+27}$;
$y_8 = \cos\left(7-3x^2\right)x$;	$y_8 = \dfrac{1}{x(\ln x - 4)^3}$;
$y_9 = 2x^2\left(3-4x^3\right)^6$;	$y_9 = \dfrac{6^x}{\sqrt{2+6^{2x}}}$;
$y_{10} = \left(x^2+2\right)\ln x$;	$y_{10} = (3-8x)\,e^{2x}$;
$y_{11} = \dfrac{2x-1}{(x-1)(x^2+1)}$;	$y_{11} = \dfrac{3x-x^2}{(x+1)(x^2+5)}$;
$y_{12} = \cos 3x \cos 9x$;	$y_{12} = \sin 2x \cos x$;

$y_{13} = (5+x^2)\cos(2x+3)\,.$	$y_{13} = (2x^2+1)\cos 2x\,.$
Вариант № 11.27	Вариант № 11.28
$y_1 = \dfrac{4}{x^3} + 2^x - 3\sqrt[8]{x}\,;$	$y_1 = 7x^6 - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{8}{\sqrt{x}}\,;$
$y_2 = \dfrac{1}{7x+10}\,;$	$y_2 = \sin(9-4x)\,;$
$y_3 = e^{7-9x}\,;$	$y_3 = \left(2x^3+4x\right)^5\,;$
$y_4 = \dfrac{4x^5}{\sqrt{3-7x^6}}\,;$	$y_4 = \dfrac{x^{10}}{15-4x^{11}}\,;$
$y_5 = \cos^5 x \sin x\,;$	$y_5 = \dfrac{5\operatorname{ctg} 5x}{\sin^2 5x}\,;$
$y_6 = \dfrac{4+3x}{\sqrt{x^2+6}}\,;$	$y_6 = \dfrac{x+3}{\sqrt{36-x^2}}\,;$
$y_7 = \dfrac{x+5}{\sqrt{x^2+16x+1}}\,;$	$y_7 = \dfrac{x-5}{x^2+6x+10}\,;$
$y_8 = 5x^2 e^{x^3+4}\,;$	$y_8 = (1+9e^x)^3 e^x\,;$
$y_9 = \dfrac{\cos\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}\,;$	$y_9 = \dfrac{1}{7x\ln^4 x}\,;$
$y_{10} = \left(x^3+3x\right)\ln x\,;$	$y_{10} = 4x\cos(8x+3)\,;$
$y_{11} = \dfrac{-x-4}{(x+1)(x+4)2x}\,;$	$y_{11} = \dfrac{-3-x}{2x(x+2)(x-3)}\,;$
$y_{12} = \sin^3 2x \cos^4 2x\,;$	$y_{12} = \sin 5x \sin 3x\,;$
$y_{13} = (3x^2-1)\sin(8-x)\,.$	$y_{13} = (5+2x^2)e^x\,.$

Задание 12. Используя методы замены переменной и интегрирования по частям вычислить определенные интегралы $\int_a^b y(x)\,dx$.

Вариант № 12.1	Вариант № 12.2
$\displaystyle\int_2^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{25-x^2}}\,;\quad \int_0^1 (x+7)e^{9x}\,dx\,.$	$\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}\,;\quad \int_1^e 3x\ln x\,dx\,.$
Вариант № 12.3	Вариант № 12.4
$\displaystyle\int_0^3 \frac{3x\,dx}{x^2+2}\,;\quad \int_0^{\pi/2} (x+2)\sin 2x\,dx\,.$	$\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}\,dx\,;\quad \int_0^{\pi/4} (x-1)\cos x\,dx\,.$

Вариант № 12.5	Вариант № 12.6
$\int\limits_{\sqrt{3}}^{2} x\sqrt{4-x^2}\,dx\,;\ \int\limits_{1/2}^{1} x\ln 2x\,dx\,.$	$\int\limits_{-2}^{5} \sqrt[3]{5x+2}\,dx\,;\ \int\limits_{\pi/3}^{\pi/6} x\cos 3x dx\,.$
Вариант № 12.7	**Вариант № 12.8**
$\int\limits_{0}^{1} x^2 e^{1+x^3}\,dx\,;\ \int\limits_{0}^{\pi/6} x\sin 3x\,dx\,.$	$\int\limits_{0}^{1} \frac{2x^2\,dx}{x^3+1}\,;\ \int\limits_{0}^{1}(2x+1)e^{4x}\,dx\,.$
Вариант № 12.9	**Вариант № 12.10**
$\int\limits_{1}^{6} \sqrt{3x-2}\,dx\,;\ \int\limits_{0}^{\sqrt{e}} x^2\ln x\,dx\,.$	$\int\limits_{0}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+2}}\,;\ \int\limits_{0}^{\pi/2}(x+1)\sin 2x\,dx\,.$
Вариант № 12.11	**Вариант № 12.12**
$\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(1+2x)^2}\,;\ \int\limits_{0}^{\pi/3} x\cos 2x\,dx\,.$	$\int\limits_{0}^{2} \frac{x^2\,dx}{x^3+3}\,;\ \int\limits_{1}^{e/3} x^2\ln 3x\,dx\,.$
Вариант № 12.13	**Вариант № 12.14**
$\int\limits_{2}^{3} \frac{3x^2\,dx}{\sqrt{2x^3-3}}\,;\ \int\limits_{-2}^{0}(x+2)e^{3x}\,dx\,.$	$\int\limits_{1}^{2} 3x^3 e^{x^4+4}\,dx\,;\ \int\limits_{1/2}^{1} 7x\ln 2x\,dx\,.$
Вариант № 12.15	**Вариант № 12.16**
$\int\limits_{-1}^{0} \frac{x}{2}e^{3x^2-2}\,dx\,;\ \int\limits_{-1}^{0}(5x+7)e^{7x}\,dx\,.$	$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{3-2x}\,;\ \int\limits_{0}^{\pi/2}(9x+5)\cos 2x\,dx\,.$
Вариант № 12.17	**Вариант № 12.18**
$\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{(6x-5)^3}\,;\ \int\limits_{-\pi/3}^{0} 5x\sin 3x\,dx\,.$	$\int\limits_{1}^{2} \frac{x^3\,dx}{7x^4+4}\,;\ \int\limits_{-3}^{-1} 2x\,e^{7x-1}\,dx\,.$
Вариант № 12.19	**Вариант № 12.20**
$\int\limits_{1}^{2} x^4 e^{4-5x^5}\,dx\,;\ \int\limits_{0}^{\pi} 5x\cos 6x\,dx\,.$	$\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{(7-3x)^2}\,;\ \int\limits_{0}^{2}(5x+7)e^{5x}\,dx\,.$
Вариант № 12.21	**Вариант № 12.22**
$\int\limits_{-2}^{0} \frac{7x^3\,dx}{\sqrt{5x^4+1}}\,;\ \int\limits_{1}^{3} 2x\,e^{3x+2}\,dx\,.$	$\int\limits_{1}^{2} \frac{x^5\,dx}{7+2x^6}\,;\ \int\limits_{0}^{2\pi}(3x-1)\sin 3x\,dx\,.$

Вариант № 12.23	Вариант № 12.24
$\int\limits_{-3}^{-1} \frac{x\,dx}{x^2+3}\,;\ \int\limits_{\pi}^{2\pi} (5x+5)\sin 3x\,dx\,.$	$\int\limits_{2}^{5} x^2\sqrt{x^3-4}\,dx\,;\ \int\limits_{1}^{3} 9xe^{3x}\,dx\,.$
Вариант № 12.25	**Вариант № 12.26**
$\int\limits_{-2}^{0} \frac{5x^6\,dx}{\sqrt{1-x^7}}\,;\ \int\limits_{0}^{1/5} (x-5)\ln 5x\,dx\,.$	$\int\limits_{4}^{5} x\sqrt{x^2-16}\,dx\,;\ \int\limits_{1}^{e} x\ln x\,dx\,.$
Вариант № 12.27	**Вариант № 12.28**
$\int\limits_{1}^{5} \frac{dx}{\sqrt{1+3x}}\,;\ \int\limits_{0}^{\pi/2} (x+3)\sin x\,dx\,.$	$\int\limits_{0}^{4} \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+4}}\,;\ \int\limits_{-1}^{1} (3x+4)e^{-x}\,dx\,.$

Задание 13. Вычислить площадь замкнутой области, ограниченной указанными линиями.
Указание. Все указанные линии и характерные точки построить в системе координат xOy.

Вариант № 13.1	Вариант № 13.2
$y=x^2-2x+3\,;\ y=x+1\,.$	$y=x^2-4x+3\,;\ y=x-1\,.$
Вариант № 13.3	Вариант № 13.4
$y=x^2-x-1\,;\ y=x+2\,.$	$y=x^2+3x-5\,;\ y=x-2\,.$
Вариант № 13.5	Вариант № 13.6
$y=x^2+6x+4\,;\ y=2x+1\,.$	$y=-x^2+x+1\,;\ y=2x-1\,.$
Вариант № 13.7	Вариант № 13.8
$y=x^2+3x+1\,;\ y=2x+3\,.$	$y=x^2+5x-1\,;\ y=2x-3\,.$
Вариант № 13.9	Вариант № 13.10
$y=x^2-4x+9\,;\ y=x+3\,.$	$y=x^2+x-13\,;\ y=2x-7\,.$
Вариант № 13.11	Вариант № 13.12
$y=x^2+4x-5\,;\ y=3x+1\,.$	$y=x^2+8x+5\,;\ y=3x-1\,.$
Вариант № 13.13	Вариант № 13.14
$y=x^2-4x+8\,;\ y=x+4\,.$	$y=x^2-2x-8\,;\ y=x-4\,.$
Вариант № 13.15	Вариант № 13.16
$y=x^2+6x-2\,;\ y=3x+8\,.$	$y=x^2+8x+2\,;\ y=3x-2\,.$

Вариант № 13.17	Вариант № 13.18
$y = x^2 - 2x + 9\,;\ y = 4x + 1\,.$	$y = x^2 + 2x - 9\,;\ y = 4x - 1\,.$
Вариант № 13.19	Вариант № 13.20
$y = x^2 + 3x - 3\,;\ y = x + 5\,.$	$y = x^2 + 7x + 3\,;\ y = x - 5\,.$
Вариант № 13.21	Вариант № 13.22
$y = x^2 - 5x + 17\,;\ y = 2x + 5\,.$	$y = x^2 + x - 17\,;\ y = 2x - 5\,.$
Вариант № 13.23	Вариант № 13.24
$y = x^2 + 5x - 9\,;\ y = 4x + 3\,.$	$y = x^2 + 11x + 9\,;\ y = 4x - 3\,.$
Вариант № 13.25	Вариант № 13.26
$y = x^2 - 5x + 11\,;\ y = x + 6\,.$	$y = -x^2 + 2x + 3\,;\ y = x + 1\,.$
Вариант № 13.27	Вариант № 13.28
$y = x^2 - 2x + 5\,;\ y = 2x + 2\,.$	$y = x^2 + 6x - 3\,;\ y = -x - 9\,.$

А.7. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Задание 14. Найти общее или частное решение указанных дифференциальных уравнений первого порядка.

Вариант № 14.1	Вариант № 14.2
$x^2y' + y^2 = 0\,;$ $y' + \frac{y}{x+1} = x^2,\ y(1) = 3\,.$	$y' = 2yx^2;$ $y' + \frac{y}{x} = \frac{e^{x/2}}{x},\ y(2) = 1\,.$
Вариант № 14.3	Вариант № 14.4
$yy' = 3x - x^2;$ $y' + x^2y = x^2,\ y(0) = -2\,.$	$y' = (x^2 - 1)y\,;$ $y' = x + y\,,\ y(0) = 4\,.$
Вариант № 14.5	Вариант № 14.6
$y' = 2y^2 + 2\,;$ $xy' + y = 3\,,\ y(1) = -1\,.$	$yy' = x - \cos x\,;$ $y' + y = 2e^{-x},\ y(0) = 3\,.$
Вариант № 14.7	Вариант № 14.8
$x^3y' + y = 0\,;$ $y' - \frac{y}{x} = x\,,\ y(-2) = 5\,.$	$y' + 2x = e^{2x};$ $y' + y = e^{-x}\cos 2x\,,\ y(0) = 1\,.$
Вариант № 14.9	Вариант № 14.10
$y' = y(6 - 2x)\,;$ $y' - \frac{y}{x\ln x} = x\ln x\,,\ y(e) = \frac{e^2}{2}\,.$	$y' = \frac{y+1}{x+5}\,;$ $y'\sin x - y\cos x = 1\,,\ y(0) = 0\,.$

Вариант № 14.11	Вариант № 14.12
$y' = y + 1$; $y' = \frac{1-y}{\sqrt{1-x^2}}$, $y(0) = 0$.	$xy' - 1 = y^2$; $y' + \frac{3y}{x} = x^{-3}$, $y(1) = 0$.
Вариант № 14.13	Вариант № 14.14
$y' = (7y + 2)x^2$; $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^2 x$, $y(0) = -3$.	$y' = \frac{2y+3}{2x+3}$; $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$, $y(0) = 3$.
Вариант № 14.15	Вариант № 14.16
$xyy' = 3 + x^3$; $(x-1)y' - y = 1$, $y(0) = 4$.	$y' = y^2 + 1$; $y' + y = \frac{xe^{-x}}{1+x^2}$, $y(0) = -2$.
Вариант № 14.17	Вариант № 14.18
$y' = 2y + 5$; $y' = \frac{1-y}{1+x^2}$, $y(0) = 2$.	$y' = -\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$; $y' - \frac{y}{x} = x\cos x$, $y(\pi) = 2$.
Вариант № 14.19	Вариант № 14.20
$y' = \frac{3x-x^2}{y}$; $y'x - y = x^2 e^{7x}$, $y(1) = 1$.	$y' = 2\sqrt{1-y^2}$; $y' - \frac{4y}{x} = x^4 e^x$, $y(1) = 0$.
Вариант № 14.21	Вариант № 14.22
$y' = 3x(y - 7)$; $y' + 3x^2 y = x^2$, $y(0) = 2$.	$y' = \frac{y^2+1}{x^2-1}$; $y'x^2 - y = e^{-1/x}x$, $y(1) = 1$.
Вариант № 14.23	Вариант № 14.24
$y' = \frac{y}{x}$; $y' + \frac{y}{x} = \sin 3x$, $y(\pi) = 1$.	$xy' + y = y^2$; $y' - \frac{y}{1-x} = x + 1$, $y(2) = 0$.
Вариант № 14.25	Вариант № 14.26
$y' = \sin x + x$; $y'x + y = 1 + \ln x$, $y(1) = -3$.	$(3x-1)y' + y^2 = 0$; $y' + y = e^{2x}$, $y(0) = 1$.
Вариант № 14.27	Вариант № 14.28
$y' = \frac{e^{1-2x}}{y^2-1}$; $y' + 2y = e^{3x}$, $y(0) = 1$.	$2yy' = (x+1)^2$; $y' - 2y = e^{-2x}$, $y(0) = 1$.

Задание 15. Найти частные решения указанных линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка.

№ 15.1	$y'' + \frac{3}{2}y' - y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$; $y'' - 2y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$; $y'' + 18y' + 81y = 0$, $y(0) = -2$; $y'(0) = 0$.

№ 15.2	$y'' - \frac{7}{2}y' + \frac{3}{2}y = 0\,, \quad y(0) = 6\,, \quad y'(0) = 3\,;$ $y'' - y' + y = 0\,, \quad y(0) = -4\,, \quad y'(0) = 1\,;$ $y'' + 14y' + 49y = 0\,, \quad y(0) = 1\,; \quad y'(0) = 2\,.$
№ 15.3	$y'' + y' + \frac{1}{2}y = 0\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = \frac{1}{2}\,;$ $y'' + 4y' + 4y = 0\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 3\,;$ $y'' + y' - 6y = 0\,, \quad y(0) = -2\,, \quad y'(0) = 1\,.$
№ 15.4	$y'' - \frac{5}{2}y' - \frac{3}{2}y = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = -3\,;$ $y'' - 2y' + 3y = 0\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1\,;$ $y'' + 10y' + 25y = 0\,, \quad y(0) = 4\,, \quad y'(0) = 2\,.$
№ 15.5	$y'' - \frac{7}{2}y' - 2y = 0\,, \quad y(0) = -1\,, \quad y'(0) = 5\,;$ $y'' + 3y' + 3y = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,;$ $y'' + 4y' + 4y = 0\,, \quad y(0) = -2\,, \quad y'(0) = 2\,.$
№ 15.6	$y'' - 4y' + 3y = 0\,, \quad y(0) = 4\,, \quad y'(0) = 0\,;$ $y'' - 3y' + 4y = 0\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1\,;$ $y'' - 8y' + 16y = 0\,, \quad y(0) = -1\,, \quad y'(0) = 2\,.$
№ 15.7	$y'' - 2y' - 3y = 0\,, \quad y(0) = -4\,, \quad y'(0) = 3\,;$ $y'' + y' + y = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,;$ $y'' - 4y' + 4y = 0\,, \quad y(0) = 5\,, \quad y'(0) = 3\,.$
№ 15.8	$y'' + 2y' - 3y = 0\,, \quad y(0) = -2\,, \quad y'(0) = -1\,;$ $y'' + 10y' + 25y = 0\,, \quad y(0) = -1\,, \quad y'(0) = 3\,;$ $y'' - y' + 2y = 0\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1\,.$
№ 15.9	$y'' + 4y' + 3y = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = -5\,;$ $y'' - 12y' + 36y = 0\,, \quad y(0) = 3\,, \quad y'(0) = -1\,;$ $y'' + 2y' + 3y = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,.$
№ 15.10	$y'' - 5y' + 4y = 0\,, \quad y(0) = 3\,, \quad y'(0) = -1\,;$ $y'' - 6y' + 9y = 0\,, \quad y(0) = 2\,, \quad y'(0) = 1\,;$ $y'' - 2y' + 4y = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,.$
№ 15.11	$y'' - 3y' - 4y = 0\,, \quad y(0) = -2\,, \quad y'(0) = 6\,;$ $y'' + 14y' + 49y = 0\,, \quad y(0) = 3\,, \quad y'(0) = -1\,;$ $y'' + 3y' + 4y = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,.$
№ 15.12	$y'' - 4y = 0\,, \quad y(0) = 4\,, \quad y'(0) = 1\,;$ $y'' + 2y' + y = 0\,, \quad y(0) = -3\,, \quad y'(0) = 0\,;$ $y'' + 6y' + 11y = 0\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1\,.$

№ 15.13	$y'' - y' - 2y = 0\,, \quad y(0) = -1\,, \quad y'(0) = 2\,;$ $y'' + 4y' + 5y = 0\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 3\,;$ $y'' + 12y' + 36y = 0\,, \quad y(0) = -2\,, \quad y'(0) = 1\,.$
№ 15.14	$y'' + y' - 2y = 0\,, \quad y(0) = 5\,, \quad y'(0) = 4\,;$ $y'' - 2y' + 5y = 0\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 2\,;$ $y'' - 16y' + 64y = 0\,, \quad y(0) = 7\,, \quad y'(0) = -3\,.$
№ 15.15	$y'' - y' = 0\,, \quad y(0) = 6\,, \quad y'(0) = 3\,;$ $y'' - 8y' + 16y = 0\,, \quad y(0) = -4\,, \quad y'(0) = 1\,;$ $y'' + 5y' + 7y = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 2\,.$
№ 15.16	$y'' + y' = 0\,, \quad y(0) = 3\,, \quad y'(0) = -3\,;$ $y'' + y' + 2y = 0\,, \quad y(0) = 2\,, \quad y'(0) = 0\,;$ $y'' - 18y' + 81y = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 4\,.$
№ 15.17	$y'' + 2y' = 0\,, \quad y(0) = 9\,, \quad y'(0) = 5\,;$ $y'' - y' + 3y = 0\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 3\,;$ $y'' + 4y' + 4y = 0\,, \quad y(0) = 7\,, \quad y'(0) = -4\,.$
№ 15.18	$y'' - 5y' + 6y = 0\,, \quad y(0) = 2\,, \quad y'(0) = -3\,;$ $y'' + 2y' + 4y = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 4\,;$ $y'' + 8y' + 16y = 0\,, \quad y(0) = 5\,, \quad y'(0) = 0\,.$
№ 15.19	$y'' + y' - 6y = 0\,, \quad y(0) = 3\,, \quad y'(0) = 4\,;$ $y'' - 2y' + 5y = 0\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1\,;$ $y'' - 14y' + 49y = 0\,, \quad y(0) = -5\,, \quad y'(0) = 8\,.$
№ 15.20	$y'' - y' - 6y = 0\,, \quad y(0) = 2\,, \quad y'(0) = -4\,;$ $y'' + 2y' + y = 0\,, \quad y(0) = 5\,, \quad y'(0) = 7\,;$ $y'' + 3y' + 6y = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 3\,.$
№ 15.21	$y'' - 6y' + 8y = 0\,, \quad y(0) = 5\,, \quad y'(0) = -2\,;$ $y'' + 20y' + 100y = 0\,, \quad y(0) = 8\,, \quad y'(0) = 1\,;$ $y'' - 3y' + 6y = 0\,, \quad y(0) = -3\,, \quad y'(0) = 0\,.$
№ 15.22	$y'' - 5y' = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 8\,;$ $y'' + 16y' + 64y = 0\,, \quad y(0) = 4\,, \quad y'(0) = -1\,;$ $y'' + 6y' + 19y = 0\,, \quad y(0) = -2\,, \quad y'(0) = 0\,.$
№ 15.23	$y'' + 2y' - 8y = 0\,, \quad y(0) = -3\,, \quad y'(0) = 2\,;$ $y'' + 6y' + 9y = 0\,, \quad y(0) = 4\,, \quad y'(0) = 1\,;$ $y'' - 4y' + 6y = 0\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = -5\,.$

№ 15.24	$y'' - 7y' + 10y = 0\,, \quad y(0) = 8\,, \quad y'(0) = -1\,;$ $y'' + 8y' + 16y = 0\,, \quad y(0) = -2\,, \quad y'(0) = 7\,;$ $y'' + 5y' + 8y = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 4\,.$
№ 15.25	$y'' - 3y' - 10y = 0\,, \quad y(0) = 8\,, \quad y'(0) = -2\,;$ $y'' - 2y' + y = 0\,, \quad y(0) = -3\,, \quad y'(0) = 6\,;$ $y'' - 7y' + 13y = 0\,, \quad y(0) = 2\,, \quad y'(0) = 3\,.$
№ 15.26	$y'' - 9y = 0\,, \quad y(0) = 4\,, \quad y'(0) = 1\,;$ $y'' - 18y' + 81y = 0\,, \quad y(0) = -5\,, \quad y'(0) = 9\,;$ $y'' + y' + 4y = 0\,, \quad y(0) = 3\,, \quad y'(0) = 0\,.$
№ 15.27	$y'' + y' - 6y = 0\,, \quad y(0) = 8\,, \quad y'(0) = -2\,;$ $y'' + 14y' + 49y = 0\,, \quad y(0) = -4\,, \quad y'(0) = 5\,;$ $y'' + 8y = 0\,, \quad y(0) = 3\,, \quad y'(0) = -2\,.$
№ 15.28	$y'' - 7y' + 12y = 0\,, \quad y(0) = 6\,, \quad y'(0) = 4\,;$ $y'' - 12y' + 36y = 0\,, \quad y(0) = -3\,, \quad y'(0) = 5\,;$ $y'' + 4y' + 2y = 0\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = -2\,.$

Задание 16. Найти общие решения указанных линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка.

Вариант № 16.1	Вариант № 16.2
$y'' + y' + \frac{1}{2}y = 5xe^{-2x};$ $y'' + 18y' + 81y = 2\sin 3x\,.$	$y'' - y' + y = 2xe^{-8x};$ $y'' + 14y' + 49y = 4\cos 2x\,.$
Вариант № 16.3	**Вариант № 16.4**
$y'' + 4y = (5x - 7)e^{-x};$ $y'' + y' - 6y = \cos x + 2\sin x\,.$	$y'' - 2y' + 3y = (x + 1)e^{-3x};$ $y'' - 2y' + 3y = 4\sin x\,.$
Вариант № 16.5	**Вариант № 16.6**
$y'' + 3y' + 3y = (x - 1)e^{-2x};$ $y'' + 4y' + 4y = \cos 3x\,.$	$y'' - 3y' + 4y = 2xe^{-6x};$ $y'' - 8y' + 16y = 2\cos x + \sin x\,.$
Вариант № 16.7	**Вариант № 16.8**
$y'' + y' + y = 3xe^{-4x};$ $y'' - 4y' + 4y = 5\cos 3x\,.$	$y'' + 10y' + 25y = (4x + 5)e^{x};$ $y'' - y' + 2y = 7\sin 4x\,.$
Вариант № 16.9	**Вариант № 16.10**
$y'' - 10y' + 25y = (x + 9)e^{2x};$ $y'' + 2y' + 3y = \cos 3x - \sin 3x\,.$	$y'' - 6y' + 9y = 4xe^{-x};$ $y'' - 2y' + 4y = -\cos 2x\,.$

Вариант № 16.11	Вариант № 16.12
$y'' + 6y' + 9y = 2xe^{4x}$; $y'' + 3y' + 4y = 3\sin x$.	$y'' + 2y' + 4y = (9x - 1)e^{-5x}$; $y'' + 6y' + 11y = 4\cos 2x$.
Вариант № 16.13	Вариант № 16.14
$y'' + 4y' + 5y = 3xe^{4x}$; $y'' + 12y' + 36y = -2\sin 5x$.	$y'' - 4y' + 5y = (1 + x)e^{-5x}$; $y'' - 16y' + 64y = 2\sin x + \cos x$.
Вариант № 16.15	Вариант № 16.16
$y'' - 8y' + 16y = -xe^{2x}$; $y'' + 5y' + 7y = 7\sin 4x$.	$y'' + y' + 2y = (x + 1)e^{-x}$; $y'' - 18y' + 81y = 3\cos 5x$.
Вариант № 16.17	Вариант № 16.18
$y'' - y' + 3y = (x + 2)e^{x}$; $y'' + 4y' + 4y = \sin 4x - \cos 4x$.	$y'' + 2y' + 4y = (x - 1)e^{x}$; $y'' + 8y' + 16y = -2\cos x$.
Вариант № 16.19	Вариант № 16.20
$y'' - 2y' + 5y = (x - 2)e^{-2x}$; $y'' - 14y' + 49y = 3\sin 2x$.	$y'' + 2y' + y = \frac{x}{2}e^{x}$; $y'' + 3y' + 6y = 5\cos 3x$.
Вариант № 16.21	Вариант № 16.22
$y'' + 4y' + 4y = (4x - 7)e^{7x}$; $y'' - 3y' + 6y = 2\sin x - \cos x$.	$y'' + 2y' - y = 5xe^{x}$; $y'' + 6y' + 19y = -4\sin 5x$.
Вариант № 16.23	Вариант № 16.24
$y'' + 6y' + 9y = (2x + 1)e^{-x}$; $y'' - 4y' + 6y = 3\cos 2x$.	$y'' + 8y' + 16y = (9x + 1)e^{-2x}$; $y'' + 5y' + 8y = 5\sin 3x$.
Вариант № 16.25	Вариант № 16.26
$y'' + 2y' - y = 5xe^{x}$; $y'' + 6y' + 19y = \sin 2x - \cos 2x$.	$y'' - 8y' + 16y = (2x + 1)e^{5x}$; $y'' + 2y' + 3y = 6\cos x$.
Вариант № 16.27	Вариант № 16.28
$y'' + 5y' + 4y = (3x - 4)e^{-x}$; $y'' + 3y' + y = -2\sin 6x$.	$y'' - y' + 2y = (4 - 2x)e^{3x}$; $y'' - 4y' + 4y = 3\cos 3x$.

A.8. Числовые и функциональные ряды

Задание 17. Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости для заданного числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Вариант № 17.1	Вариант № 17.2	Вариант № 17.3
$u_n = \dfrac{2n+1}{2^n \cdot n}$.	$u_n = \dfrac{n+5}{6^n}$.	$u_n = \dfrac{n^2}{3^n + n}$.

Вариант № 17.4	Вариант № 17.5	Вариант № 17.6
$u_n = \dfrac{3n}{5^n - n}$.	$u_n = \dfrac{n^2 + n}{2^n}$.	$u_n = \dfrac{4 + n}{6^n + 2}$.
Вариант № 17.7	Вариант № 17.8	Вариант № 17.9
$u_n = \dfrac{2 + n}{5^n \cdot n}$.	$u_n = \dfrac{n}{5^n + 3n}$.	$u_n = \dfrac{2^n}{3^n + n}$.
Вариант № 17.10	Вариант № 17.11	Вариант № 17.12
$u_n = \dfrac{n^2 - n}{8^n}$.	$u_n = \dfrac{5n - 1}{4^n}$.	$u_n = \ln \dfrac{7 + 9n}{4 + 9n}$.
Вариант № 17.13	Вариант № 17.14	Вариант № 17.15
$u_n = \dfrac{n + 1}{3\sqrt{n}}$.	$u_n = \dfrac{n - 4n^3}{8n^2 + 5}$.	$u_n = \dfrac{49 + 5n}{n^2 - 2}$.
Вариант № 17.16	Вариант № 17.17	Вариант № 17.18
$u_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}}{n + 1}$.	$u_n = \dfrac{n^3 + n^2 + 9}{n + 16n^2}$.	$u_n = \dfrac{e^n}{n^4}$.
Вариант № 17.19	Вариант № 17.20	Вариант № 17.21
$u_n = \dfrac{n^2 + 5n}{e^n}$.	$u_n = \cos n^{-1}$.	$u_n = \left(1 + \dfrac{4}{n}\right)^n$.
Вариант № 17.22	Вариант № 17.23	Вариант № 17.24
$u_n = \left(1 - \dfrac{3}{n}\right)^n$.	$u_n = \dfrac{\sin(n + 2)}{n}$.	$u_n = n \operatorname{tg} n^{-1}$.
Вариант № 17.25	Вариант № 17.26	Вариант № 17.27
$u_n = \left(\dfrac{n + 3}{n}\right)^n$.	$u_n = \dfrac{\cos(2n - 1)}{2n - 1}$.	$u_n = \ln \dfrac{4 + 3n}{9 + 3n}$.
Вариант № 17.28		
$u_n = \ln \dfrac{2n + 1}{n + 1}$.		

Задание 18. Используя признак сходимости Даламбера, исследовать на сходимость заданный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Вариант № 18.1	Вариант № 18.2	Вариант № 18.3
$u_n = \dfrac{5^n}{n!}$.	$u_n = \dfrac{\sqrt{2n}}{4^n}$.	$u_n = \dfrac{3n + 1}{2^n}$.
Вариант № 18.4	Вариант № 18.5	Вариант № 18.6
$u_n = \dfrac{n^n}{n!}$.	$u_n = \dfrac{n^3 + 2n}{6^n}$.	$u_n = \dfrac{4^n n!}{n^n}$.

Вариант № 18.7	Вариант № 18.8	Вариант № 18.9
$u_n = \dfrac{5^n}{(n+8)^2}$.	$u_n = \dfrac{\sqrt{7n}}{(3+n)!}$.	$u_n = \dfrac{2^n}{n+10}$.
Вариант № 18.10	Вариант № 18.11	Вариант № 18.12
$u_n = \dfrac{3^n}{(5n)!}$.	$u_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{5^n}$.	$u_n = \dfrac{6^n}{n^4+1}$.
Вариант № 18.13	Вариант № 18.14	Вариант № 18.15
$u_n = \dfrac{1}{2^n \cdot n}$.	$u_n = \dfrac{7^n}{\sqrt{n^2+4}}$.	$u_n = \dfrac{1}{(3n-2)!}$.
Вариант № 18.16	Вариант № 18.17	Вариант № 18.18
$u_n = \dfrac{4^n}{9^n}$.	$u_n = \dfrac{8^{n+4}}{n^2}$.	$u_n = \dfrac{3n+1}{2^n}$.
Вариант № 18.19	Вариант № 18.20	Вариант № 18.21
$u_n = \dfrac{6^n}{(n+4)^2}$.	$u_n = \dfrac{3^n}{n^n}$.	$u_n = \dfrac{(n+1)!}{8^n}$.
Вариант № 18.22	Вариант № 18.23	Вариант № 18.24
$u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$.	$u_n = \dfrac{5^n}{\sqrt{3n+1}}$.	$u_n = \dfrac{n^3}{4^{n+2}}$.
Вариант № 18.25	Вариант № 18.26	Вариант № 18.27
$u_n = \dfrac{n+1}{6^n}$.	$u_n = \dfrac{n^n}{(n+3)!}$.	$u_n = \dfrac{2^n n!}{(5n+1)!}$.
Вариант № 18.28		
$u_n = \dfrac{n^2+4}{3^{n+1}}$.		

Задание 19. Используя интегральный признак сходимости Коши, исследовать на сходимость заданный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Вариант № 19.1	Вариант № 19.2	Вариант № 19.3
$u_n = \dfrac{1}{\sqrt{3n-2}}$.	$u_n = \dfrac{1}{1+n^2}$.	$u_n = \pi^{-n}$.
Вариант № 19.4	Вариант № 19.5	Вариант № 19.6
$u_n = \dfrac{1}{\sqrt{6n+1}}$.	$u_n = \dfrac{1}{n \ln^3 n}$.	$u_n = \dfrac{1}{n(n+3)}$.
Вариант № 19.7	Вариант № 19.8	Вариант № 19.9
$u_n = \dfrac{1}{n^2+4}$.	$u_n = \dfrac{1}{n^2+5n+6}$.	$u_n = \dfrac{1}{5n(n+1)}$.

Вариант № 19.10	Вариант № 19.11	Вариант № 19.12
$u_n = \dfrac{n+3}{2n^3}$.	$u_n = \dfrac{1}{\sqrt{7n-5}}$.	$u_n = \dfrac{1}{4n-3}$.
Вариант № 19.13	Вариант № 19.14	Вариант № 19.15
$u_n = \dfrac{1}{n^2+3n}$.	$u_n = \dfrac{1}{\sqrt{8n+1}}$.	$u_n = \dfrac{1}{e^n}$.
Вариант № 19.16	Вариант № 19.17	Вариант № 19.18
$u_n = \dfrac{1}{n^2+9}$.	$u_n = \dfrac{1}{n^2+16}$.	$u_n = \dfrac{1}{(3+n)^3}$.
Вариант № 19.19	Вариант № 19.20	Вариант № 19.21
$u_n = \dfrac{1}{\sqrt{6n-3}}$.	$u_n = \dfrac{1}{n^2-5n}$.	$u_n = \dfrac{1}{n^2-2}$.
Вариант № 19.22	Вариант № 19.23	Вариант № 19.24
$u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5n-4}}$.	$u_n = \dfrac{\ln^{-1}(n+2)}{n+2}$.	$u_n = \dfrac{\ln^{-3}(n+3)}{n+3}$.
Вариант № 19.25	Вариант № 19.26	Вариант № 19.27
$u_n = \dfrac{1}{n^2+7}$.	$u_n = \dfrac{3n+2}{n^3}$.	$u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}\, e^{\sqrt{n}}}$.
Вариант № 19.28		
$u_n = \pi^{-2n}$.		

Задание 20. Найти область сходимости для заданного степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

Вариант № 20.1	Вариант № 20.2	Вариант № 20.3
$a_n = \dfrac{1}{(2n-1)^2}$.	$a_n = \dfrac{1}{3^n}$.	$a_n = \dfrac{2^n}{n^2}$.
Вариант № 20.4	Вариант № 20.5	Вариант № 20.6
$a_n = \dfrac{(3n)!}{3^n}$.	$a_n = \dfrac{n+2}{2^n(n+3)}$.	$a_n = \dfrac{2n}{4^n(n+3)}$.
Вариант № 20.7	Вариант № 20.8	Вариант № 20.9
$a_n = \dfrac{3^n}{n^2+3n+2}$.	$a_n = \dfrac{n^2}{5^n}$.	$a_n = \dfrac{n+3}{3^n}$.
Вариант № 20.10	Вариант № 20.11	Вариант № 20.12
$a_n = \dfrac{n^4}{n!}$.	$a_n = \dfrac{6\sqrt{n}}{4^n}$.	$a_n = \dfrac{2^n}{n^3}$.

Вариант № 20.13	Вариант № 20.14	Вариант № 20.15
$a_n = \dfrac{7}{2^n\sqrt{n}}$.	$a_n = \dfrac{1}{n+n^2}$.	$a_n = \dfrac{4n-3}{n^3}$.
Вариант № 20.16	Вариант № 20.17	Вариант № 20.18
$a_n = \dfrac{n+3}{8^n(n+1)}$.	$a_n = \dfrac{3n+5}{5^n n}$.	$a_n = \dfrac{n+9}{n^3+n^2}$.
Вариант № 20.19	Вариант № 20.20	Вариант № 20.21
$a_n = \dfrac{n+8}{7^n}$.	$a_n = \dfrac{3^n}{n^3}$.	$a_n = \dfrac{3^n}{2^n\sqrt{n}}$.
Вариант № 20.22	Вариант № 20.23	Вариант № 20.24
$a_n = \dfrac{n^3}{2^n\sqrt{n}}$.	$a_n = \dfrac{4}{5^n n}$.	$a_n = \dfrac{n^3+n}{9^n}$.
Вариант № 20.25	Вариант № 20.26	Вариант № 20.27
$a_n = \dfrac{5n+n^2}{6^n}$.	$a_n = \dfrac{(5n+2)^2}{8^n}$.	$a_n = \dfrac{7^n}{7n^2+n}$.
Вариант № 20.28		
$a_n = \dfrac{5n+8}{9^n n^2}$.		

Задание 21. Вычислить указанный определённый интеграл с точностью до 0,001 с помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд.

Вариант № 21.1	Вариант № 21.2	Вариант № 21.3
$\displaystyle\int_0^{0,25} \ln\left(1+\sqrt{x}\right) dx$.	$\displaystyle\int_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3}\, dx$.	$\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin x}{x}\, dx$.
Вариант № 21.4	Вариант № 21.5	Вариант № 21.6
$\displaystyle\int_0^{0,5} \cos\frac{x^2}{4}\, dx$.	$\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$.	$\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\, dx$.
Вариант № 21.7	Вариант № 21.8	Вариант № 21.9
$\displaystyle\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx$.	$\displaystyle\int_0^{0,2} \frac{e^{-2x}-1}{x}\, dx$.	$\displaystyle\int_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

Вариант № 21.10	Вариант № 21.11	Вариант № 21.12
$\displaystyle\int_0^1 \sin x^2\, dx\,.$	$\displaystyle\int_0^{0,5} x\ln(1+x^2)\, dx\,.$	$\displaystyle\int_0^{0,1} \frac{e^x-1}{x}\, dx\,.$
Вариант № 21.13	**Вариант № 21.14**	**Вариант № 21.15**
$\displaystyle\int_0^{0,9} x\,\mathrm{arctg}\, x^2\, dx\,.$	$\displaystyle\int_0^{0,4} \sqrt{x}\sin 3x\, dx\,.$	$\displaystyle\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}\,.$
Вариант № 21.16	**Вариант № 21.17**	**Вариант № 21.18**
$\displaystyle\int_{0,2}^{0,6} \frac{e^{-x}}{x}\, dx\,.$	$\displaystyle\int_0^{0,3} \frac{\mathrm{arctg}\, 2x}{x}\, dx\,.$	$\displaystyle\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+4x)}{x}\, dx\,.$
Вариант № 21.19	**Вариант № 21.20**	**Вариант № 21.21**
$\displaystyle\int_0^{0,6} \sin 2x^2\, dx\,.$	$\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}\,.$	$\displaystyle\int_{0,1}^{0,5} \frac{\cos x^2}{4x}\, dx\,.$
Вариант № 21.22	**Вариант № 21.23**	**Вариант № 21.24**
$\displaystyle\int_0^{0,6} \frac{\ln(3x+1)}{5x}\, dx\,.$	$\displaystyle\int_0^{0,3} xe^{-3x^2}\, dx\,.$	$\displaystyle\int_0^{1,5} \frac{dx}{\sqrt[4]{81+x^4}}\,.$
Вариант № 21.25	**Вариант № 21.26**	**Вариант № 21.27**
$\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{\ln(1+x/3)}{x}\, dx\,.$	$\displaystyle\int_0^{0,8} x^3\,\mathrm{arctg}\, 4x\, dx\,.$	$\displaystyle\int_0^{0,9} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx\,.$
Вариант № 21.28		
$\displaystyle\int_0^{0,5} xe^{4x^2}\, dx\,.$		

Задание 22. Найти три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд функции, удовлетворяющей решению указанной задачи Коши.

Вариант № 22.1	Вариант № 22.2	Вариант № 22.3
$y' = x^2y + y^3\,,$ $y(0) = 1\,.$	$y'' = xyy'\,,$ $y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1\,.$	$y' = x\cos x - 4y^2\,,$ $y(0) = 1\,.$
Вариант № 22.4	**Вариант № 22.5**	**Вариант № 22.6**
$y'' = xy^2\,,$ $y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1\,.$	$y' = y^2e^x - x^2\,,$ $y(0) = 1\,.$	$y'' = 5y - xy'\,,$ $y(0) = 3\,,\ y'(0) = 0\,.$

Вариант № 22.7	Вариант № 22.8	Вариант № 22.9
$y' = xy^2 - 2e^x\,,$ $y(0) = 3\,.$	$y'' = yy' - x^2\,,$ $y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1\,.$	$y' = 2x\sin x - y^2\,,$ $y(0) = 3\,.$
Вариант № 22.10	Вариант № 22.11	Вариант № 22.12
$y'' = ye^x - 5x\,,$ $y(0) = 0\,,\ y'(0) = 2\,.$	$y' = 3xy - e^x\,,$ $y(0) = 0\,.$	$y'' = 3xy' - y^2\,,$ $y(0) = 0, y'(0) = -1.$
Вариант № 22.13	Вариант № 22.14	Вариант № 22.15
$y' = 3x^2y + y^4\,,$ $y(0) = 1\,.$	$y'' = 2xy^2 - \sin x\,,$ $y(0) = 1\,,\ y'(0) = 2\,.$	$y' = e^y + xy\,,$ $y(0) = 0\,.$
Вариант № 22.16	Вариант № 22.17	Вариант № 22.18
$y'' = 2xy^2y'\,,$ $y(0) = -1, y'(0) = 2.$	$y' = y\cos x - 2x^3\,,$ $y(0) = 2\,.$	$y'' = x^2y\,,$ $y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1\,.$
Вариант № 22.19	Вариант № 22.20	Вариант № 22.21
$y' = ye^{-x} + y^2\,,$ $y(0) = 2\,.$	$y'' = 3\sin y - 5\cos x\,,$ $y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1\,.$	$y' = x^2y^2 - 1\,,$ $y(0) = 1\,.$
Вариант № 22.22	Вариант № 22.23	Вариант № 22.24
$y'' = 6xyy'\,,$ $y(0) = -1, y'(0) = 1.$	$y' = 4e^x + y\cos x\,,$ $y(0) = 0\,.$	$y'' = 6yx - x^3 - 2y^4\,,$ $y(0) = -1, y'(0) = 0.$
Вариант № 22.25	Вариант № 22.26	Вариант № 22.27
$y' = yx + \sin x +$ $+ \cos y\,,\ y(0) = 0\,.$	$y'' = x + y^2\,,$ $y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1\,.$	$y' = xy + 3x^2\,,$ $y(0) = -1\,.$
Вариант № 22.28		
$y'' = e^x + y\,,$ $y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0\,.$		

А.9. Комплексные числа

Задание 23. Дана пара комплексных чисел z_1 и z_2.
Найти: а) сумму $z_1 + z_2$ в алгебраической форме; б) записать z_1, z_2 в тригонометрической и показательной формах; в) произведение z_1z_2, частное $\frac{z_1}{z_2}$, степень z_1^9, корень $\sqrt[3]{z_1^2}$ в тригонометрической форме.

Вариант № 23.1	Вариант № 23.2	Вариант № 23.3
$z_1 = -\sqrt{3} + i\,,$ $z_2 = 1 - i\,.$	$z_1 = 1 + i\,,$ $z_2 = \sqrt{3} - i\,.$	$z_1 = \sqrt{3} + i\,,$ $z_2 = -1 + i\,.$

Вариант № 23.4	Вариант № 23.5	Вариант № 23.6
$z_1 = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $z_2 = \sqrt{3}+i$.	$z_1 = -3\sqrt{3}+3i$, $z_2 = \sqrt{2}-\sqrt{2}i$.	$z_1 = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $z_2 = 2\sqrt{3}-2i$.
Вариант № 23.7	Вариант № 23.8	Вариант № 23.9
$z_1 = 2\sqrt{3}-2i$, $z_2 = -1+i$.	$z_1 = 4+4i$, $z_2 = 1+\sqrt{3}i$.	$z_1 = -\sqrt{3}+i$, $z_2 = \sqrt{2}+\sqrt{2}i$.
Вариант № 23.10	Вариант № 23.11	Вариант № 23.12
$z_1 = 3+3i$, $z_2 = 1-\sqrt{3}i$.	$z_1 = 4+4i$, $z_2 = 1+\sqrt{3}i$.	$z_1 = -2+2i$, $z_2 = -\sqrt{3}+i$.
Вариант № 23.13	Вариант № 23.14	Вариант № 23.15
$z_1 = -3\sqrt{3}+3i$, $z_2 = 1+i$.	$z_1 = 1-\sqrt{3}i$, $z_2 = -5+5i$.	$z_1 = -1+\sqrt{3}i$, $z_2 = -4+4i$.
Вариант № 23.16	Вариант № 23.17	Вариант № 23.18
$z_1 = 2+2i$, $z_2 = 2\sqrt{3}+2i$.	$z_1 = 3\sqrt{3}-3i$, $z_2 = 1-i$.	$z_1 = 2-2\sqrt{3}i$, $z_2 = -4+4i$.
Вариант № 23.19	Вариант № 23.20	Вариант № 23.21
$z_1 = 2\sqrt{3}-2i$, $z_2 = 3-3i$.	$z_1 = 1+i$, $z_2 = 2\sqrt{3}+2i$.	$z_1 = -\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $z_2 = -1+\sqrt{3}i$.
Вариант № 23.22	Вариант № 23.23	Вариант № 23.24
$z_1 = 4-4i$, $z_2 = -2+2\sqrt{3}i$.	$z_1 = 2+2\sqrt{3}i$, $z_2 = 1-i$.	$z_1 = -3+3i$, $z_2 = \sqrt{2}-\sqrt{2}i$.
Вариант № 23.25	Вариант № 23.26	Вариант № 23.27
$z_1 = -3\sqrt{3}+3i$, $z_2 = 1+i$.	$z_1 = 2-2i$, $z_2 = \sqrt{3}+i$.	$z_1 = 3\sqrt{3}+3i$, $z_2 = -1+i$.
Вариант № 23.28		
$z_1 = 2\sqrt{3}+2i$, $z_2 = 1-i$.		

Задание 24. Найти комплексные корни многочлена третьей степени $P_3(x)$, если известен один из его корней $x_1 = 1$.

Вариант № 24.1	Вариант № 24.2	Вариант № 24.3
$3x^3-3x^2+8x-8$.	x^3-3x^2+4x-2.	$x^3-11x^2+179x-169$.
Вариант № 24.4	Вариант № 24.5	Вариант № 24.6
$x^3-x^2+64x-64$.	$4x^3-4x^2+5x-5$.	$x^3-7x^2+22x-16$.

Вариант № 24.7	Вариант № 24.8	Вариант № 24.9
$x^3-31x^2+319x-289.$	$x^3-x^2+4x-4.$	$x^3-x^2+16x-16.$
Вариант № 24.10	Вариант № 24.11	Вариант № 24.12
$2x^3-2x^2+7x-7.$	$x^3+9x^2+18x-28.$	$x^3+5x^2+19x-25.$
Вариант № 24.13	Вариант № 24.14	Вариант № 24.15
$x^3-x^2+x-1.$	$5x^3-5x^2+9x-9.$	$x^3-3x^2+12x-10.$
Вариант № 24.16	Вариант № 24.17	Вариант № 24.18
$x^3-27x^2+44x-18.$	$3x^3-3x^2+2x-2.$	$6x^3-6x^2+5x-5.$
Вариант № 24.19	Вариант № 24.20	Вариант № 24.21
$x^3-7x^2+31x-25.$	$x^3+3x^2+x-5.$	$4x^3-4x^2+7x-7.$
Вариант № 24.22	Вариант № 24.23	Вариант № 24.24
$2x^3-2x^2+3x-3.$	$x^3-9x^2+24x-16.$	$x^3+x^2+4x-6.$
Вариант № 24.25	Вариант № 24.26	Вариант № 24.27
$7x^3-7x^2+10x-10.$	$x^3-x^2+8x-8.$	$x^3+7x^2+12x-20.$
Вариант № 24.28		
$x^3-5x^2+12x-8.$		

Задание 25. Построить на комплексной плоскости множество точек.

Вариант № 25.1	Вариант № 25.2	Вариант № 25.3
$\lvert z\rvert=3\,.$	$\arg z=\frac{\pi}{3}\,.$	$\lvert z\rvert\leqslant 4\,.$
Вариант № 25.4	Вариант № 25.5	Вариант № 25.6
$\lvert z-4\rvert<5\,.$	$\lvert z\rvert=7\,.$	$\arg z=\frac{\pi}{4}\,.$
Вариант № 25.7	Вариант № 25.8	Вариант № 25.9
$\lvert z\rvert\leqslant 5\,.$	$\lvert z+4\rvert\geqslant 6\,.$	$\lvert z\rvert=1\,.$
Вариант № 25.10	Вариант № 25.11	Вариант № 25.12
$\arg z=\frac{\pi}{6}\,.$	$\lvert z\rvert>3\,.$	$\lvert z+1\rvert\leqslant 2\,.$
Вариант № 25.13	Вариант № 25.14	Вариант № 25.15
$\lvert z\rvert=5\,.$	$\arg z=\frac{5\pi}{6}\,.$	$\lvert z\rvert\leqslant 2\,.$
Вариант № 25.16	Вариант № 25.17	Вариант № 25.18
$\lvert z+3\rvert>1\,.$	$\lvert z\rvert=2\,.$	$\arg z=\frac{2\pi}{3}\,.$
Вариант № 25.19	Вариант № 25.20	Вариант № 25.21
$\lvert z\rvert>6\,.$	$\lvert z-4\rvert\leqslant 5\,.$	$\lvert z\rvert=4\,.$
Вариант № 25.22	Вариант № 25.23	Вариант № 25.24
$\arg z=\frac{3\pi}{4}.$	$\lvert z\rvert\geqslant 8\,.$	$\lvert z-1\rvert>2\,.$

Вариант № 25.25	Вариант № 25.26	Вариант № 25.27
$\lvert z\rvert = 7$.	$\arg z = \frac{\pi}{2}$.	$\lvert z\rvert < 1$.

Вариант № 25.28
$\lvert z+5\rvert \leqslant 6$.

А.10. Случайные события

Задание 26. Решить указанные задачи, пользуясь классическим определением вероятности и формулами комбинаторики.

26.1. Из коробки карточками, пронумерованными цифрами от 1 до 8, наудачу извлекают четыре. Найти вероятность того, что номера извлечённых карточек будут чётными.

26.2. Владелец билета лотереи «5 из 36» зачёркивает пять номеров. Какова вероятность того, что им будут угаданы не менее четырёх выигрышных номеров?

26.3. На столе лежат буквы: «о», «р», «с», «т». Найти вероятность того, что их произвольная перестановка сложится одно из слов: «рост», «сорт», «торс» или «трос».

26.4. Из урны с 6 белыми и 3 чёрными шарами наугад извлекают три. Найти вероятность того, что не менее двух шаров будет чёрного цвета?

26.5. Владелец билета лотереи «6 из 49» зачёркивает шесть номеров. Какова вероятность того, что им будет угадано хотя бы пять выигрышных номеров?

26.6. Подброшены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков будет меньше семи, а их произведение — больше семи.

26.7. Для группы из 15 студентов, среди которых 5 девушек, случайным образом назначают трёх дежурных. Найти вероятность того, что двое дежурных будут одного пола?

26.8. Из коробки, в которой находятся девять цветных и четыре простых карандаша, наугад взяли три. Найти вероятность того, что хотя бы два карандаша из трёх будут простыми?

26.9. На столе лежат 12 семян подсолнечника, 4 из которых испорчены. Воробей наугад склевал три семени. Какова вероятность того, что хотя бы одно семя было испорченным?

26.10. Из ящика, содержащего 17 красных и 5 зелёных яблок, наугад извлекаются три. Найти вероятность того, что одно их извлечённых яблок оказалось красным.

26.11. В упаковке находится 30 яиц, 15 из которых высшего сорта. Найти вероятность того, что из трёх извлечённых наугад яиц два оказались высшего сорта.

26.12. Персонал предприятия состоит из 8 мужчин и 12 женщин. По табельным номерам выбрали двух человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц все оказались мужчинами.

26.13. Из урны с 2 белыми и 7 чёрными шарами наугад извлекают три. Найти вероятность того, что все шары будут чёрного цвета?

26.14. В торговой точке находятся 9 саженцев яблони, 3 из которых со скрытым дефектом. Какова вероятность того, что три произвольно выбранных саженца не имеют этого дефекта?

26.15. В корзине лежат 8 арбузов, 5 из которых высшего сорта. Найти вероятность того, что из трёх произвольно извлечённых плодов все окажутся высшего сорта.

26.16. Подброшены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков будет кратна трём, а их произведение — кратно двум.

26.17. Из урны с 7 белыми и 2 чёрными шарами наугад извлекают три. Найти вероятность того, что не менее двух шаров будут чёрного цвета?

26.18. В гараже стоят 5 исправных и 4 неисправных автомобиля. Механик выбирает для технического осмотра три автомобиля. Найти вероятность того, что к осмотру выбраны исправные автомобили?

26.19. На каждом диске 5-ти буквенного кодового замка нанесено по 6 букв. Найти вероятность того, что замок удастся открыть не более чем за три попытки.

26.20. Из вазы с 5 шоколадными и 15 карамельными конфетами наудачу выбирают три. Найти вероятность того, что две конфеты окажутся карамельными?

26.21. Из урны с 3 белыми и 7 чёрными шарами наугад извлекают три. Найти вероятность того, что один шар будет белого цвета?

26.22. Со стола, где лежат 9 нормальных и 2 червивых яблока, наудачу берут три. Найти вероятность того, что среди выбранных яблок будет хотя бы одно червивое.

26.23. На столе лежат буквы: «к», «л», «н», «о», «у». Найти вероятность того, что их произвольная перестановка сложится одно из слов: «клоун», «колун», «кулон» или «уклон».

26.24. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков будет больше пяти, а их произведение — меньше пяти.

26.25. На каждом диске 5-ти буквенного кодового замка нанесено по 6 букв. Найти вероятность того, что замок удастся открыть не более чем за пять попыток.

26.26. Из коробки с кубиками, пронумерованными цифрами от 1 до 7, наудачу извлекают три. Найти вероятность того, что номера извлечённых кубиков будут нечётными.

26.27. Из урны с 5 белыми и 4 чёрными шарами наугад извлекают три. Найти вероятность того, что хотя бы один шар будет белого цвета?

26.28. На столе лежат буквы: «а», «к», «н», «о», «р». Найти вероятность того, что их произвольная перестановка сложится одно из слов: «крона», «норка» или «коран».

Задание 27. Решить предыдущие задачи, пользуясь теоремами сложения и умножения вероятностей.

Задание 28. На плоскости случайно выбирают три точки (x, y), принадлежащие области Ω. Найти вероятность того, что k из них также принадлежат области A.

Вариант	Ω	A	k
№ 28.1	$-1 \leqslant x \leqslant 1;\quad 0 \leqslant y \leqslant 3;$	$y \leqslant 3 + x^2;$	2
№ 28.2	$0 \leqslant x \leqslant 3;\quad 3 \leqslant y \leqslant 6;$	$y \geqslant 6 - x^2/2;$	1
№ 28.3	$1 \leqslant x \leqslant 4;\quad 2 \leqslant y \leqslant 4;$	$y \leqslant 5 - x^2/3;$	3
№ 28.4	$-2 \leqslant x \leqslant 0;\quad -2 \leqslant y \leqslant 0;$	$y \leqslant x^2/2 - 1;$	0
№ 28.5	$0 \leqslant x \leqslant 3;\quad -2 \leqslant y \leqslant 0;$	$y \geqslant x^2/2 - 2;$	3
№ 28.6	$1 \leqslant x \leqslant 2;\quad 0 \leqslant y \leqslant 2;$	$y \leqslant 2 - 2x^2;$	2
№ 28.7	$0 \leqslant x \leqslant 2;\quad -3 \leqslant y \leqslant -1;$	$y \geqslant 3 + x^2/2;$	1
№ 28.8	$1 \leqslant x \leqslant 2;\quad -1 \leqslant y \leqslant 1;$	$y \leqslant 2 - 2x;$	0
№ 28.9	$1 \leqslant x \leqslant 3;\quad -3 \leqslant y \leqslant 0;$	$y \geqslant x^2/2 - 3;$	2
№ 28.10	$0 \leqslant x \leqslant 2;\quad -1 \leqslant y \leqslant 0;$	$y \leqslant x^2/2 - 1;$	3
№ 28.11	$1 \leqslant x \leqslant 2;\quad -2 \leqslant y \leqslant 0;$	$y \geqslant -x^2/3;$	1
№ 28.12	$1 \leqslant x \leqslant 2;\quad -3 \leqslant y \leqslant 0;$	$y \leqslant -1 - x^2/2;$	2
№ 28.13	$0 \leqslant x \leqslant 1;\quad -3 \leqslant y \leqslant 0;$	$y \leqslant -1 - x;$	0
№ 28.14	$0 \leqslant x \leqslant 2;\quad -2 \leqslant y \leqslant 0;$	$y \geqslant -x^2/2;$	1
№ 28.15	$1 \leqslant x \leqslant 3;\quad -3 \leqslant y \leqslant 0;$	$y \leqslant 2x - 4;$	2
№ 28.16	$1 \leqslant x \leqslant 3;\quad 0 \leqslant y \leqslant 2;$	$y \geqslant 2 - x^2/2;$	1

№ 28.17	$0 \leqslant x \leqslant 2; \quad 1 \leqslant y \leqslant 4;$	$y \geqslant 2x^2;$	3
№ 28.18	$1 \leqslant x \leqslant 2; \quad 0 \leqslant y \leqslant 2;$	$y \leqslant x^2/2;$	0
№ 28.19	$1 \leqslant x \leqslant 2; \quad 2 \leqslant y \leqslant 5;$	$y \leqslant 3 + x^2/4;$	1
№ 28.20	$1 \leqslant x \leqslant 2; \quad -1 \leqslant y \leqslant 2;$	$y \geqslant x^2/2;$	2
№ 28.21	$1 \leqslant x \leqslant 2; \quad 0 \leqslant y \leqslant 4;$	$y \leqslant 3 - x^2/3;$	3
№ 28.22	$1 \leqslant x \leqslant 3; \quad -3 \leqslant y \leqslant 0;$	$y \leqslant -x^2;$	1
№ 28.23	$0 \leqslant x \leqslant 2; \quad -3 \leqslant y \leqslant 0;$	$y \geqslant -3x^2/2;$	0
№ 28.24	$1 \leqslant x \leqslant 3; \quad -2 \leqslant y \leqslant 1;$	$y \leqslant x^2/2 - 1;$	3
№ 28.25	$0 \leqslant x \leqslant 2; \quad -2 \leqslant y \leqslant 0;$	$y \leqslant x^2 - 2;$	1
№ 28.26	$0 \leqslant x \leqslant 2; \quad -1 \leqslant y \leqslant 0;$	$y \geqslant -x^2/2;$	0
№ 28.27	$1 \leqslant x \leqslant 3; \quad -2 \leqslant y \leqslant 0;$	$y \leqslant -x^2;$	2
№ 28.28	$1 \leqslant x \leqslant 3; \quad 3 \leqslant y \leqslant 5;$	$y \geqslant x^2;$	3

Задание 29. Решить указанные задачи, пользуясь формулами полной вероятности и Байеса.

29.1. Из теплицы A поступает 65% посадочного материала, из теплицы B — 15%, а остальная часть — из теплицы C. Приживаемость материала из теплицы A составляет 70%, из теплицы B — 90%, из теплицы C — 80%. Если наугад взятое растение прижилось, то какова вероятность того, что оно поступило из теплицы A?

29.2. Корм для скота поступает на ферму от поставщиков A, B и C в соотношении 1:2:3. Поставщик A обеспечивает 90% корма высшего качества, поставщик B — 80%, а поставщик C — 60%. Если взятая на ферме проба корма оказался не высшего качества, то какова вероятность того, что корм поступил от поставщика A?

29.3. Изделия для торговой сети изготавливаются тремя заводами. Завод I поставляет 60% всех изделий, а завод II — 30%. Доля качественной продукции у завода I составляет 80%, у завода II–85%, а у завода III — 90%. Если наудачу купленное изделие оказалось качественным, то какова вероятность того, что оно было изготовлено на заводе II?

29.4. Трейдинговый робот ежеминутно выбирает один из 12 возможных алгоритмов работы. Вероятность получения прибыли для первых четырёх алгоритмов составляет $\frac{3}{4}$, для следующих пяти — $\frac{4}{5}$, а для остальных — $\frac{2}{3}$. Если за прошедшую минуту прибыль была получена, то какова вероятность того, что её принёс алгоритм из I группы?

29.5. Для участия в выставке отобраны 3 кролика породы I, 5 кроликов породы II и 4 кролика породы III. Вероятности того, что кролики I, II и III пород получат дипломы выставки равны: $\frac{9}{10}$, $\frac{7}{10}$ и $\frac{5}{10}$. Если на прошедшей выставке кролик получил диплом, то какова вероятность того, что это был кролик II породы?

29.6. В первой секции стола лежат 4 гайки М12 и 3 гайки М10, а во второй секции — 3 гайки М12 и 2 гайки М10. Из первой секции не глядя перекладывают во вторую две гайки, после чего наугад вынимают из второй секции одну гайку М12. Какова вероятность того, что из первой секции во вторую перекладывали гайки М12 и М10?

29.7. При уборке комбайн в среднем 20% времени работает на I режиме, 30% времени — на II режиме, а остальное время — на III режиме. Во время уборки на I режиме потери составляют 1%, на II режиме — 2%, а на III режиме — 3%. Если потери при уборке поля составили 1,5%, то какую часть времени комбайн проработал на I режиме?

29.8. Частоты грузовых, легковых автомашин и автобусов, проезжающих по шоссе мимо заправочной станции, относятся друг к другу как 3:2:3. Вероятность того, что в этом месте шоссе потребуется заправка для грузовой автомашины равна $\frac{1}{5}$, для легковой — $\frac{2}{5}$, а для автобуса — $\frac{1}{7}$. Если к станции для заправки подъехала машина, то какова вероятность того, что она легковая?

29.9. Три автомата равной производительности производят детали для одного конвейера. Автомат I производит в среднем 85% качественных деталей, автомат II — 90%, а автомат III — 95%. Если произвольная деталь, поступившая на конвейер, оказалась качественной, то какова вероятность того, что она была произведена автоматом III?

29.10. Скорострельности самоходных артиллерийских установок A, B и C составляют 6, 8 и 10 выстрелов в минуту, при вероятностях поражения цели 90%, 75% и 66%. Если одновременным огнём трёх установок цель была поражена, то какова вероятность того, что точный выстрел был произведён из установки A?

29.11. В первой урне находится 5 белых шара и 4 чёрных, во второй — 6 белых и 3 чёрных. Из первой урны во вторую не глядя перекладывают два шара и после этого из второй урны наугад берут один шар. Если шар оказался чёрным, то какова вероятность того, что из первой урны во вторую переложили два чёрных шара?

29.12. Из теплицы A поступает 20% посадочного материала, из теплицы B — 15%, а остальная часть — из теплицы C. Приживаемость материала из теплицы A составляет 80%, из теплицы B — 70%, из теплицы C — 60%. Если наугад взятое растение прижилось, то какова вероятность того, что оно поступило из теплицы B?

29.13. Корм для скота поступает на ферму от поставщиков A, B и C в соотношении 2:1:4. Поставщик A обеспечивает 80% корма высшего качества, поставщик B — 60%, а поставщик C — 70%. Если взятая на ферме проба корма оказался не высшего качества, то какова вероятность того, что корм поступил от поставщика B?

29.14. Изделия для торговой сети изготавливаются тремя заводами. Завод I поставляет 70% всех изделий, а завод II — 20%. Доля качественной продукции у завода I составляет 85%, у завода II–90%, а у завода III — 80%. Если наудачу купленное изделие оказалось качественным, то какова вероятность того, что оно было изготовлено на заводе III?

29.15. Трейдинговый робот ежеминутно выбирает один из 15 возможных алгоритмов работы. Вероятность получения прибыли для первых пяти алгоритмов составляет $\frac{4}{5}$, для следующих шести — $\frac{5}{6}$, а для остальных — $\frac{3}{4}$. Если за прошедшую минуту прибыль была получена, то какова вероятность того, что её принёс алгоритм из II группы?

29.16. Для участия в выставке отобраны 5 кроликов породы I, 4 кролика породы II и 3 кролика породы III. Вероятности того, что кролики I, II и III пород получат дипломы выставки равны: $\frac{8}{10}$, $\frac{6}{10}$ и $\frac{4}{10}$. Если на прошедшей выставке кролик получил диплом, то какова вероятность того, что это был кролик I породы?

29.17. В первой секции стола лежат 6 гаек M12 и 5 гаек M10, а во второй секции — 4 гайки M12 и 3 гайки M10. Из первой секции не глядя перекладывают во вторую две гайки, после чего наугад вынимают из второй секции одну гайку M12. Какова вероятность того, что из первой секции во вторую перекладывали две гайки M12?

29.18. При уборке комбайн в среднем 50% времени работает на I режиме, 30% времени — на II режиме, а остальное время — на III режиме. Во время уборки на I режиме потери составляют 1%, на II режиме — 2%, а на III режиме — 3%. Если потери при уборке поля составили 2,5%, то какую часть времени комбайн проработал на II режиме?

29.19. Частоты грузовых, легковых автомашин и автобусов, проезжающих по шоссе мимо заправочной станции, относятся друг к другу как 1:2:2. Вероятность того, что в этом месте шоссе потребуется заправка для грузовой автомашины равна $\frac{1}{5}$, для легковой — $\frac{2}{5}$, а для автобуса — $\frac{1}{7}$. Если к станции для заправки подъехала машина, то какова вероятность того, что она грузовая?

29.20. Три автомата равной производительности производят детали для одного конвейера. Автомат I производит в среднем 95% качественных деталей, автомат II — 90%, а автомат III — 85%. Если произвольная деталь, поступившая на конвейер, оказалась качественной, то какова вероятность того, что она была произведена автоматом I?

29.21. Скорострельности самоходных артиллерийских установок A, B и C составляют 9, 6 и 7 выстрелов в минуту, при вероятностях поражения цели 66%, 90% и 75%. Если одновременным огнём трёх установок цель была поражена, то какова вероятность того, что точный выстрел был произведён из установки B?

29.22. Из теплицы A поступает 45% посадочного материала, из теплицы B — 10%, а остальная часть — из теплицы C. Приживаемость материала из теплицы A составляет 70%, из теплицы B — 60%, из теплицы C — 80%. Если наугад взятое растение не прижилось, то какова вероятность того, что оно поступило из теплицы B?

29.23. Корм для скота поступает на ферму от поставщиков A, B и C в соотношении $1 : 1 : 3$. Поставщик A обеспечивает 85% корма высшего качества, поставщик B — 75%, а поставщик C — 65%. Если взятая на ферме проба корма оказался не высшего качества, то какова вероятность того, что корм поступил от поставщика C?

29.24. Изделия для торговой сети изготавливаются тремя заводами. Завод I поставляет 30% всех изделий, а завод II — 40%. Доля качественной продукции у завода I составляет 75%, у завода II–80%, а у завода III — 90%. Если наудачу купленное изделие оказалось не качественным, то какова вероятность того, что оно было изготовлено на заводе I?

29.25. Трейдинговый робот ежеминутно выбирает один из 14 возможных алгоритмов работы. Вероятность получения прибыли для первых трёх алгоритмов составляет $\frac{2}{3}$, для следующих пяти — $\frac{4}{5}$, а для остальных — $\frac{5}{6}$. Если за прошедшую минуту прибыль была не получена, то какова вероятность того, что её не принёс алгоритм из I группы?

29.26. Для участия в выставке отобраны 4 кролика породы I, 5 кроликов породы II и 3 кролика породы III. Вероятности того, что кролики I, II и III пород получат дипломы выставки равны: $\frac{8}{10}$, $\frac{6}{10}$ и $\frac{4}{10}$. Если на прошедшей выставке кролик не получил диплом, то какова вероятность того, что это был кролик III породы?

29.27. В первой секции стола лежат 5 гаек М12 и 7 гаек М10, а во второй секции — 2 гайки М12 и 4 гайки М10. Из первой секции не глядя перекладывают во вторую две гайки, после чего наугад вынимают из второй секции одну гайку М10. Какова вероятность того, что из первой секции во вторую перекладывали две гайки М10?

29.28. При уборке комбайн в среднем 30% времени работает на I режиме, 40% времени — на II режиме, а остальное время — на III режиме. Во время уборки на I режиме потери составляют 1%, на II режиме — 2%, а на III режиме — 3%. Если потери при уборке поля составили 2%, то какую часть времени комбайн проработал на II режиме?

Задание 30. Для пользователя сети Интернет известна вероятность $p = \mathrm{const}$ того, что его суточный трафик превысит установленное ограничение. Найти вероятности того, что суточный трафик: а) в течение n_1 дней будет превышать ограничение ровно k_1 раз; б) в течение n_1 дней будет превышать ограничение не более k_1 раз; в) в течение n_2 дней будет превышать ограничение ровно k_2 раз; г) в течение n_2 дней будет превышать ограничение не более k_2 раз.

№	p	n_1	k_1	n_2	k_2	№	p	n_1	k_1	n_2	k_2
30.1	$\frac{1}{4}$	8	3	160	45	30.2	$\frac{3}{4}$	7	5	150	110
30.3	$\frac{1}{2}$	6	2	120	65	30.4	$\frac{2}{3}$	7	4	130	115
30.5	$\frac{1}{3}$	8	2	150	55	30.6	$\frac{3}{4}$	8	4	180	135
30.7	$\frac{1}{2}$	9	2	180	95	30.8	$\frac{4}{5}$	7	3	140	110
30.9	$\frac{1}{4}$	8	2	160	45	30.10	$\frac{2}{3}$	6	2	130	85
30.11	$\frac{1}{2}$	9	4	170	90	30.12	$\frac{4}{5}$	5	3	140	115
30.13	$\frac{1}{5}$	6	2	130	25	30.14	$\frac{3}{4}$	7	3	150	120
30.15	$\frac{1}{4}$	8	4	170	45	30.16	$\frac{2}{3}$	9	2	190	125
30.17	$\frac{1}{2}$	5	2	110	55	30.18	$\frac{3}{5}$	8	3	150	100
30.19	$\frac{2}{5}$	6	3	130	50	30.20	$\frac{4}{5}$	5	2	150	120
30.21	$\frac{1}{2}$	7	4	150	80	30.22	$\frac{3}{4}$	5	2	130	105
30.23	$\frac{1}{4}$	5	2	100	30	30.24	$\frac{2}{3}$	6	3	130	95
30.25	$\frac{1}{3}$	8	4	130	25	30.26	$\frac{3}{5}$	7	3	150	120
30.27	$\frac{2}{5}$	6	2	110	50	30.28	$\frac{1}{2}$	9	4	190	100

А.11. Случайные величины

Задание 31. Указаны законы распределения независимых дискретных случайных величин X и Y. Требуется составить закон распределения и найти числовые характеристики $\mathbf{M}T$, $\mathbf{D}T$ и $\mathbf{P}\{-2 < T \leqslant 2\}$ случайной величины $T = aX + bY$.

31.1	x	-5	-2	2	5	y	3	4	5	a	-2
	p	0,1	0,3	0,4	0,2	p	0,3	0,5	0,2	b	$1/9$
31.2	x	-2	-1	2	3	y	-3	0	1	a	-1
	p	0,2	0,1	0,2	0,5	p	0,1	0,3	0,6	b	5

31.3	x	−1	1	2	3	y	−1	0	1	a	1/5
	p	0,2	0,1	0,5	0,2	p	0,2	0,1	0,7	b	8
31.4	x	−4	−2	0	2	y	−4	−3	1	a	1/6
	p	0,1	0,6	0,2	0,1	p	0,1	0,8	0,1	b	−2
31.5	x	−2	1	2	3	y	−3	1	2	a	1/2
	p	0,1	0,2	0,3	0,4	p	0,3	0,5	0,2	b	4
31.6	x	−3	−2	−1	1	y	−3	−2	2	a	−6
	p	0,6	0,1	0,1	0,2	p	0,8	0,1	0,1	b	7
31.7	x	−4	−3	−2	0	y	−3	−2	1	a	1/2
	p	0,4	0,1	0,2	0,3	p	0,7	0,2	0,1	b	2
31.8	x	−5	−4	−2	0	y	−3	−1	0	a	1/5
	p	0,6	0,2	0,1	0,1	p	0,1	0,4	0,5	b	−1
31.9	x	−2	−1	1	2	y	−2	−1	0	a	8
	p	0,2	0,1	0,3	0,4	p	0,1	0,7	0,2	b	−3
31.10	x	−3	0	1	2	y	−3	−2	−1	a	3
	p	0,3	0,1	0,1	0,5	p	0,1	0,2	0,7	b	1/2
31.11	x	−3	−2	0	1	y	−3	−2	−1	a	2
	p	0,1	0,3	0,4	0,2	p	0,3	0,2	0,5	b	−4
31.12	x	−1	0	1	2	y	−1	2	2	a	−2
	p	0,2	0,1	0,2	0,5	p	0,1	0,3	0,6	b	−3
31.13	x	−3	−2	−1	0	y	−3	−2	1	a	3
	p	0,2	0,1	0,5	0,2	p	0,2	0,1	0,7	b	1/6
31.14	x	−3	−2	0	1	y	−3	−2	0	a	−2
	p	0,1	0,6	0,2	0,1	p	0,1	0,8	0,1	b	1/2
31.15	x	−2	0	1	2	y	−3	−2	1	a	2
	p	0,1	0,2	0,3	0,4	p	0,3	0,5	0,2	b	1/3
31.16	x	0	1	2	3	y	−3	−2	0	a	1/4
	p	0,6	0,1	0,1	0,2	p	0,8	0,1	0,1	b	−2
31.17	x	−4	−3	−2	−1	y	2	3	4	a	5
	p	0,4	0,1	0,2	0,3	p	0,7	0,2	0,1	b	1/9
31.18	x	−3	−2	0	1	y	−4	−3	−1	a	1/6
	p	0,6	0,2	0,1	0,1	p	0,1	0,4	0,5	b	−4

31.19	x	-2	-1	0	1	y	-4	-3	-2	a	$1/9$
	p	0,2	0,1	0,3	0,4	p	0,1	0,7	0,2	b	6
31.20	x	-1	0	1	2	y	-1	0	1	a	4
	p	0,3	0,1	0,1	0,5	p	0,1	0,2	0,7	b	$1/3$
31.21	x	0	1	2	3	y	-2	-1	1	a	-7
	p	0,1	0,3	0,4	0,2	p	0,3	0,2	0,5	b	3
31.22	x	-3	-2	-2	-1	y	-3	-2	-1	a	-2
	p	0,2	0,1	0,2	0,5	p	0,1	0,3	0,6	b	$1/6$
31.23	x	-4	-3	-2	-1	y	-3	-2	0	a	$1/3$
	p	0,2	0,1	0,5	0,2	p	0,2	0,1	0,7	b	9
31.24	x	-3	-2	-1	0	y	-2	-1	0	a	-4
	p	0,1	0,6	0,2	0,1	p	0,1	0,8	0,1	b	$1/4$
31.25	x	-4	-3	-2	0	y	-3	-1	0	a	2
	p	0,1	0,2	0,3	0,4	p	0,3	0,5	0,2	b	$1/7$
31.26	x	-4	-2	-1	0	y	1	2	3	a	-2
	p	0,1	0,4	0,4	0,1	p	0,3	0,5	0,2	b	$1/9$
31.27	x	-3	-2	-1	0	y	-3	-2	-1	a	1
	p	0,2	0,5	0,1	0,2	p	0,1	0,6	0,3	b	-4
31.28	x	-1	0	1	3	y	-1	1	2	a	$1/5$
	p	0,2	0,4	0,2	0,2	p	0,2	0,7	0,1	b	-5

Задание 32. Непрерывная случайная величина X задана с помощью функции распределения $F(x)$. Требуется найти функцию плотности вероятности $f(x)$ случайной величины X и её числовые характеристики: $\mathbf{M}X$, $\mathbf{D}X$, $\mathbf{P}\{\alpha < X \leqslant \beta\}$, $x_{\frac{1}{2}}$. Все полученные результаты проиллюстрировать графически.

32.1	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant -3\,; \\ 1 - \frac{x^2}{9} & \text{при} \quad -3 < x \leqslant 0\,; \\ 1 & \text{при} \quad x > 0\,; \end{cases}$	$\alpha = -2\,;$ $\beta = 2\,.$
32.2	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0\,; \\ \frac{x^7}{128} & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 2\,; \\ 1 & \text{при} \quad x > 2\,; \end{cases}$	$\alpha = -1\,;$ $\beta = 1\,.$

32.3	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant -4\,;\\ 1-\frac{x^2}{16} & \text{при} \quad -4<x\leqslant 0\,;\\ 1 & \text{при} \quad x>0\,;\end{cases}$	$\alpha=-2\,;$ $\beta=1\,.$
32.4	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant 0\,;\\ \frac{x^3}{8} & \text{при} \quad 0<x\leqslant 2\,;\\ 1 & \text{при} \quad x>2\,;\end{cases}$	$\alpha=-2\,;$ $\beta=1\,.$
32.5	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant -8\,;\\ 1-\frac{x^2}{64} & \text{при} \quad -8<x\leqslant 0\,;\\ 1 & \text{при} \quad x>0\,;\end{cases}$	$\alpha=-5\,;$ $\beta=1\,.$
32.6	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant 0\,;\\ 1-(1-x)^3 & \text{при} \quad 0<x\leqslant 1\,;\\ 1 & \text{при} \quad x>1\,;\end{cases}$	$\alpha=-\frac{1}{2}\,;$ $\beta=\frac{1}{2}\,.$
32.7	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant 0\,;\\ \frac{x^3}{64} & \text{при} \quad 0<x\leqslant 4\,;\\ 1 & \text{при} \quad x>4\,;\end{cases}$	$\alpha=-4\,;$ $\beta=3\,.$
32.8	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant 0\,;\\ \frac{x^2}{64} & \text{при} \quad 0<x\leqslant 8\,;\\ 1 & \text{при} \quad x>8\,;\end{cases}$	$\alpha=-2\,;$ $\beta=4\,.$
32.9	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant 0\,;\\ \frac{x^3}{125} & \text{при} \quad 0<x\leqslant 5\,;\\ 1 & \text{при} \quad x>5\,;\end{cases}$	$\alpha=-1\,;$ $\beta=3\,.$
32.10	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant 0\,;\\ \frac{x^4}{81} & \text{при} \quad 0<x\leqslant 3\,;\\ 1 & \text{при} \quad x>3\,;\end{cases}$	$\alpha=-2\,;$ $\beta=2\,.$
32.11	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant -2\,;\\ \frac{(x+2)^5}{32} & \text{при} \quad -2<x\leqslant 0\,;\\ 1 & \text{при} \quad x>0\,;\end{cases}$	$\alpha=-1\,;$ $\beta=2\,.$
32.12	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant 0\,;\\ \frac{x^2}{4} & \text{при} \quad 0<x\leqslant 2\,;\\ 1 & \text{при} \quad x>2\,;\end{cases}$	$\alpha=-1\,;$ $\beta=1\,.$

32.13	$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant -5; \\ \frac{(x+5)^3}{125} & \text{при} \quad -5 < x \leqslant 0; \\ 1 & \text{при} \quad x > 0; \end{cases}$	$\alpha=-2$; $\beta=2$.
32.14	$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant -7; \\ 1-\frac{x^2}{49} & \text{при} \quad -7 < x \leqslant 0; \\ 1 & \text{при} \quad x > 0; \end{cases}$	$\alpha=-2$; $\beta=5$.
32.15	$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0; \\ \frac{x^2}{49} & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 7; \\ 1 & \text{при} \quad x > 7; \end{cases}$	$\alpha=-5$; $\beta=5$.
32.16	$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0; \\ \frac{x^2}{36} & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 6; \\ 1 & \text{при} \quad x > 6; \end{cases}$	$\alpha=-2$; $\beta=2$.
32.17	$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant -2; \\ 1-\frac{x^2}{4} & \text{при} \quad -2 < x \leqslant 0; \\ 1 & \text{при} \quad x > 0; \end{cases}$	$\alpha=-1$; $\beta=1$.
32.18	$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant -3; \\ \frac{x^3}{27}+1 & \text{при} \quad -3 < x \leqslant 0; \\ 1 & \text{при} \quad x > 0; \end{cases}$	$\alpha=-2$; $\beta=3$.
32.19	$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant -5; \\ 1-\frac{x^2}{25} & \text{при} \quad -5 < x \leqslant 0; \\ 1 & \text{при} \quad x > 0; \end{cases}$	$\alpha=-3$; $\beta=2$.
32.20	$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant -2; \\ \frac{x^5}{32}+1 & \text{при} \quad -2 < x \leqslant 0; \\ 1 & \text{при} \quad x > 0; \end{cases}$	$\alpha=-1$; $\beta=1$.
32.21	$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant 0; \\ \frac{x^5}{25} & \text{при} \quad 0 < x \leqslant 5; \\ 1 & \text{при} \quad x > 5; \end{cases}$	$\alpha=-2$; $\beta=3$.
32.22	$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \leqslant -1; \\ 1-x^4 & \text{при} \quad -1 < x \leqslant 0; \\ 1 & \text{при} \quad x > 0; \end{cases}$	$\alpha=-\frac{1}{5}$; $\beta=\frac{2}{5}$.

32.23	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant -2;\\ \frac{x^7}{128}+1 & \text{при} \quad -2<x\leqslant 0;\\ 1 & \text{при} \quad x>0;\end{cases}$	$\alpha=-1$; $\beta=2$.
32.24	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant 0;\\ \frac{x^4}{16} & \text{при} \quad 0<x\leqslant 2;\\ 1 & \text{при} \quad x>2;\end{cases}$	$\alpha=-1$; $\beta=1$.
32.25	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant -6;\\ 1-\frac{x^2}{36} & \text{при} \quad -6<x\leqslant 0;\\ 1 & \text{при} \quad x>0;\end{cases}$	$\alpha=-3$; $\beta=3$.
32.26	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant 0;\\ 1-(1-x)^2 & \text{при} \quad 0<x\leqslant 1;\\ 1 & \text{при} \quad x>1;\end{cases}$	$\alpha=-\frac{1}{2}$; $\beta=\frac{1}{2}$.
32.27	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant 0;\\ \frac{x^2}{3}+\frac{2x}{3} & \text{при} \quad 0<x\leqslant 1;\\ 1 & \text{при} \quad x>1;\end{cases}$	$\alpha=\frac{1}{3}$; $\beta=\frac{4}{3}$.
32.28	$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\leqslant \frac{1}{2};\\ (x-\frac{1}{2})^2 & \text{при} \quad \frac{1}{2}<x\leqslant \frac{3}{2};\\ 1 & \text{при} \quad x>\frac{3}{2};\end{cases}$	$\alpha=\frac{1}{4}$; $\beta=\frac{3}{4}$.

Задание 33. Найти вероятность $\mathbf{P}\{X\leqslant\varepsilon\}$ для биномиально распределённой случайной величины $X\sim\mathbf{B}(n,p)$, если $\mathbf{M}X=m$, $\mathbf{D}X=d$.

№	m	d	ε	№	m	d	ε	№	m	d	ε
33.1	3	$\frac{3}{4}$	4	33.2	2	1	2	33.3	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$	3
33.4	$\frac{5}{3}$	$\frac{10}{9}$	2	33.5	1	$\frac{3}{4}$	3	33.6	$\frac{7}{4}$	$\frac{21}{16}$	4
33.7	1	$\frac{4}{5}$	3	33.8	$\frac{6}{5}$	$\frac{18}{25}$	2	33.9	$\frac{7}{5}$	$\frac{28}{25}$	3
33.10	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	2	33.11	4	$\frac{4}{3}$	4	33.12	2	$\frac{2}{3}$	2
33.13	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16}$	4	33.14	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{4}$	2	33.15	1	$\frac{2}{3}$	3
33.16	$\frac{3}{5}$	$\frac{12}{25}$	2	33.17	$\frac{12}{5}$	$\frac{36}{25}$	3	33.18	$\frac{5}{4}$	$\frac{15}{6}$	4
33.19	$\frac{18}{5}$	$\frac{36}{25}$	2	33.20	1	$\frac{2}{3}$	4	33.21	$\frac{3}{5}$	$\frac{12}{25}$	3
33.22	3	$\frac{3}{2}$	2	33.23	2	$\frac{6}{5}$	4	33.24	$\frac{7}{3}$	$\frac{14}{9}$	3

33.25	$\frac{4}{5}$	$\frac{16}{25}$	2	33.26	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{9}$	3	33.27	2	$\frac{2}{3}$	4
33.28	$\frac{14}{5}$	$\frac{42}{25}$	2								

Задание 34. Найти вероятность $\mathbf{P}\{X \leqslant \varepsilon\}$ для пуассоновски распределённой случайной величины $X \sim \mathbf{P}(\lambda)$, если $\mathbf{P}\{X = 0\} = e^{-m}$.

№	m	ε	№	m	ε	№	m	ε	№	m	ε
34.1	4	2	34.2	2	5	34.3	4	3	34.4	2	4
34.5	2	5	34.6	3	4	34.7	3	2	34.8	3	3
34.9	4	4	34.10	3	2	34.11	5	3	34.12	3	4
34.13	3	3	34.14	3	4	34.15	4	2	34.16	5	2
34.17	3	2	34.18	4	4	34.19	2	1	34.20	5	2
34.21	3	1	34.22	5	3	34.23	3	2	34.24	5	4
34.25	4	4	34.26	5	3	34.27	2	4	34.28	5	1

Задание 35. Используя таблицу вариантов из предыдущей задачи найти вероятность $\mathbf{P}\{X \leqslant \varepsilon\}$ для геометрически распределённой случайной величины $X \sim \mathbf{G}(p)$, если $\mathbf{D}X = m$.

Задание 36. На стороне AB треугольника ABC выбирается произвольная точка $D \in AB$. Используя координаты точек A, B и C, найти математическое ожидание $\mathbf{M}S$ и дисперсию $\mathbf{D}S$ площади треугольника ADC.

Вариант № 36.1	$A(1,-2)$,	$B(2,3)$,	$C(5,0)$.
Вариант № 36.2	$A(5,3)$,	$B(4,8)$,	$C(1,5)$.
Вариант № 36.3	$A(2,2)$,	$B(3,-3)$,	$C(6,0)$.
Вариант № 36.4	$A(4,-1)$,	$B(3,-6)$,	$C(0,-3)$.
Вариант № 36.5	$A(3,-1)$,	$B(4,4)$,	$C(7,1)$.
Вариант № 36.6	$A(-1,-6)$,	$B(-2,-1)$,	$C(-5,-4)$.
Вариант № 36.7	$A(-2,5)$,	$B(-1,0)$,	$C(2,3)$.
Вариант № 36.8	$A(5,-3)$,	$B(4,-8)$,	$C(1,-5)$.
Вариант № 36.9	$A(-1,-1)$,	$B(0,4)$,	$C(3,1)$.
Вариант № 36.10	$A(-5,1)$,	$B(-6,6)$,	$C(-9,3)$.
Вариант № 36.11	$A(3,5)$,	$B(4,0)$,	$C(7,3)$.
Вариант № 36.12	$A(0,6)$,	$B(-1,1)$,	$C(-4,4)$.
Вариант № 36.13	$A(-3,-1)$,	$B(-2,4)$,	$C(1,1)$.

Вариант № 36.14	$A(-4,1)$,	$B(-5,6)$,	$C(-8,3)$.
Вариант № 36.15	$A(1,1)$,	$B(2,-4)$,	$C(5,-1)$.
Вариант № 36.16	$A(-3,2)$,	$B(-4,-3)$,	$C(-7,0)$.
Вариант № 36.17	$A(3,0)$,	$B(4,5)$,	$C(7,2)$.
Вариант № 36.18	$A(-4,-6)$,	$B(-5,-1)$,	$C(-8,-4)$.
Вариант № 36.19	$A(4,-3)$,	$B(5,-8)$,	$C(8,-5)$.
Вариант № 36.20	$A(0,-3)$,	$B(-1,-8)$,	$C(-4,-5)$.
Вариант № 36.21	$A(-3,-3)$,	$B(-2,2)$,	$C(1,-1)$.
Вариант № 36.22	$A(1,-6)$,	$B(0,-1)$,	$C(-3,-4)$.
Вариант № 36.23	$A(4,5)$,	$B(5,0)$,	$C(8,3)$.
Вариант № 36.24	$A(2,-2)$,	$B(1,-7)$,	$C(-2,-4)$.
Вариант № 36.25	$A(0,4)$,	$B(1,9)$,	$C(4,6)$.
Вариант № 36.26	$A(-2,4)$,	$B(-3,9)$,	$C(-6,6)$.
Вариант № 36.27	$A(-4,-2)$,	$B(-3,-7)$,	$C(0,-4)$.
Вариант № 36.28	$A(3,5)$,	$B(2,0)$,	$C(-1,3)$.

Задание 37. Для показательно распределённой случайной величины $X \sim \mathbf{E}(\lambda)$ задана вероятность $\mathbf{P}\{X \leqslant \varepsilon\} = p$. Требуется найти параметр λ, записать функции плотности вероятности $f(x)$ и распределения $F(x)$, а также определить характеристики $\mathbf{M}X$, $\mathbf{D}X$ и $x_{\frac{1}{2}}$. Полученные результаты проиллюстрировать графически.

№	p	ε	№	p	ε	№	p	ε	№	p	ε
37.1	$\frac{1}{4}$	2	37.2	$\frac{1}{2}$	5	37.3	$\frac{3}{4}$	3	37.4	$\frac{1}{2}$	1
37.5	$\frac{1}{2}$	7	37.6	$\frac{2}{3}$	6	37.7	$\frac{2}{3}$	2	37.8	$\frac{1}{3}$	1
37.9	$\frac{1}{4}$	4	37.10	$\frac{1}{3}$	4	37.11	$\frac{1}{5}$	1	37.12	$\frac{1}{3}$	8
37.13	$\frac{2}{3}$	3	37.14	$\frac{1}{3}$	4	37.15	$\frac{3}{4}$	1	37.16	$\frac{2}{5}$	5
37.17	$\frac{2}{3}$	0	37.18	$\frac{3}{4}$	7	37.19	$\frac{1}{2}$	3	37.20	$\frac{3}{5}$	7
37.21	$\frac{1}{3}$	1	37.22	$\frac{1}{5}$	4	37.23	$\frac{2}{3}$	6	37.24	$\frac{1}{5}$	2
37.25	$\frac{1}{4}$	4	37.26	$\frac{2}{5}$	3	37.27	$\frac{1}{2}$	1	37.28	$\frac{3}{5}$	5

Задание 38. Для нормально распределённой случайной величины $X \sim \mathbf{N}(a, \sigma)$ задана вероятность $\mathbf{P}\{|X - a| \leqslant \varepsilon\} = p$. Требуется найти параметр σ, записать функции плотности вероятности $f(x)$ и распределения $F(x)$, а также определить характеристики $\mathbf{M}X$, $\mathbf{D}X$ и $x_{\frac{1}{2}}$.

Полученные результаты проиллюстрировать графически.

№	p	a	ε	№	p	a	ε	№	p	a	ε
38.1	$\frac{1}{4}$	2	1	38.2	$\frac{3}{4}$	3	2	38.3	$\frac{1}{2}$	1	1
38.4	$\frac{1}{2}$	5	2	38.5	$\frac{2}{3}$	2	1	38.6	$\frac{1}{3}$	1	1
38.7	$\frac{1}{2}$	7	3	38.8	$\frac{2}{3}$	6	2	38.9	$\frac{1}{3}$	8	3
38.10	$\frac{1}{4}$	4	2	38.11	$\frac{1}{3}$	4	1	38.12	$\frac{1}{5}$	1	2
38.13	$\frac{2}{3}$	3	1	38.14	$\frac{3}{4}$	1	2	38.15	$\frac{2}{5}$	5	2
38.16	$\frac{1}{3}$	4	2	38.17	$\frac{1}{2}$	3	1	38.18	$\frac{3}{5}$	7	3
38.19	$\frac{2}{3}$	0	1	38.20	$\frac{3}{4}$	7	2	38.21	$\frac{1}{5}$	2	2
38.22	$\frac{1}{3}$	1	2	38.23	$\frac{1}{5}$	4	1	38.24	$\frac{2}{3}$	6	3
38.25	$\frac{1}{4}$	4	2	38.26	$\frac{1}{2}$	1	1	38.27	$\frac{3}{5}$	5	3
38.28	$\frac{2}{5}$	3	1								

Приложение Б

Справочный материал

Б.1. Символы и обозначения

$\blacktriangleright \ldots \blacktriangleleft$ — **начало и конец** решения задачи.
$x \to \infty$ — переменная x **стремится к** бесконечности.
$\exists\ \varepsilon > 0$ — **существует** такое ε большее нуля.
$\forall\ \varepsilon \neq 0$ — **для всякого** ε не равного нулю.
$a \in A$ — элемент a **принадлежит** множеству A.
$a \in \varnothing$ — элемент a принадлежит **пустому множеству**.
$A \subset B$ — **включение** множества A в множество B.
$A \cup B$ — **объединение** множеств A и B.
$A \cap B$ — **пересечение** множеств A и B.
$A \Leftrightarrow B$ — выражение A **эквивалентно** выражению B.
$A \Rightarrow B$ — из выражения A **следует** выражение B.
$n!$ — **факториал** натурального числа n: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$; $0! = 1$.
$\mathbb{N}$ — множество **натуральных** чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.
$\mathbb{Z}$ — множество **целых** чисел $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm n, \ldots\}$.
$\mathbb{Q}$ — множество **рациональных** чисел $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}\}$; $p, q \in \mathbb{Z}$; $q \neq 0$.
$\mathbb{R}$ — множество **действительных** (вещественных) чисел $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \overline{\mathbb{Q}}$.
$\mathbb{C}$ — множество **комплексных** чисел $\mathbb{C} = \{x + i\,y\}$; $x, y \in \mathbb{R}$; $i^2 = -1$.

Б.2. Модуль

Определение модуля

$$|\,a\,| = \begin{cases} a\,, & \text{при} \quad a \geqslant 0\,; \\ -a\,, & \text{при} \quad a < 0\,. \end{cases}$$

Свойства модуля:

1. Общие соотношения:

$$|+a| = |-a|; \qquad |\,a\,|^2 = a^2; \qquad \sqrt{a^2} = |\,a\,|.$$

2. Модуль произведения и частного:

$$|\,a\cdot b\,| = |\,a\,|\cdot|\,b\,|; \qquad\qquad |\,a/b\,| = |\,a\,|/|\,b\,|.$$

3. Неравенства с модулем:

$$|\,x\,| < a \;\Leftrightarrow\; -a < x < a; \qquad |\,x\,| > a \;\Leftrightarrow\; (x < -a)\cup(x > a);$$
$$|\,x - x_0| < a \;\Leftrightarrow\; x_0 - a < x < x_0 + a.$$

Б.3. Формулы сокращенного умножения

1. Формула разности квадратов:

$$a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)\,.$$

2. Формулы квадрата суммы и разности:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \qquad\qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

3. Формулы суммы и разности кубов:

$$a^3 + b^3 = (a+b)\,(a^2 - ab + b^2)\,; \qquad a^3 - b^3 = (a-b)\,(a^2 + ab + b^2)\,.$$

4. Формулы куба суммы и разности:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Б.4. Дроби

1. Правила сложения и вычитания дробей:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}\,; \qquad \frac{a}{b} \pm m = \frac{a \pm m\cdot b}{b}\,; \qquad \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a\cdot d \pm c\cdot b}{b\cdot d}\,.$$

2. Правила умножения дробей:

$$\frac{a}{b} = \frac{a\cdot c}{b\cdot c} = \frac{a/c}{b/c}\,; \qquad \frac{a}{b}\cdot m = \frac{a\cdot m}{b} = a\cdot\frac{m}{b}\,; \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}\,.$$

3. Правила деления дробей:

$$\frac{a}{b}\Big/ m = \frac{a}{b\cdot m}\,; \qquad \frac{a}{b}\Big/\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}\,; \qquad m\Big/\frac{a}{b} = m\cdot\frac{b}{a} = \frac{m\cdot b}{a}\,.$$

Б.5. Степени

Определение натуральной, нулевой и отрицательной степени

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}, \quad a^0 = 1\,, \quad a^{-s} = \frac{1}{a^s}\,,$$

где a — основание степени $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$; n, s — показатели степени $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{R}$.

Алгебраические действия над степенями:

1. Умножение и деление степеней:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}\,; \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}\,.$$

2. Возведение в степень произведения, частного и степени:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n\,; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}\,; \qquad (a^n)^m = a^{n \cdot m}\,.$$

3. Извлечение корня из произведения, частного и степени:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\,; \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\,; \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}\,.$$

Б.6. Логарифмы

Определение. Логарифмом числа x по основанию a, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называется показатель степени y в которую нужно возвести a, чтобы получить число x:

$$y = \log_a x\,; \qquad a^y = x\,.$$

В частности,

$$y = \ln x \quad \Rightarrow \quad x = e^y\,; \quad y = \lg x \quad \Rightarrow \quad x = 10^y\,.$$

Свойства логарифмов:

1. Для любого $a > 0$, $a \neq 1$ числа 0 и 1 можно представить в логарифмическом виде:

$$\log_a 1 = 0\,; \qquad \log_a a = 1.$$

2. Логарифм произведения и частного:

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2\,; \qquad \log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2\,.$$

3. Логарифм степени и корня:

$$\log_a x^n = n\log_a|x|\,; \qquad \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x\,.$$

4. Изменение основания логарифма:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}\,; \qquad \log_a x = \log_{a^n} x^n\,.$$

5. Произведение и частное логарифмов при разных основаниях:

$$\log_a x_1 \cdot \log_b x_2 = \log_a x_2 \cdot \log_b x_1\,; \qquad \frac{\log_a x_1}{\log_a x_2} = \frac{\log_b x_1}{\log_b x_2}\,.$$

Б.7. Формулы тригонометрии

1. Основные тригонометрические соотношения:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\,; \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,; \qquad \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1\,.$$

2. Формулы двойного угла:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\,; \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\,; \quad \operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\,.$$

3. Формулы для тангенса половинного угла:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\,; \qquad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\,; \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\,.$$

4. Формулы понижения степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}\,; \qquad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}\,.$$

5. Значения тригонометрических функций для некоторых углов

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} x$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

x	π	$\pi - \frac{\pi}{6}$	$\pi - \frac{\pi}{4}$	$\pi - \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0
$\cos x$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{ctg} x$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

6. Некоторые значения обратных тригонометрических функций

a	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin a$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos a$	π	$\pi - \frac{\pi}{6}$	$\pi - \frac{\pi}{4}$	$\pi - \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

a	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\operatorname{arctg} a$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{arcctg} a$	π	$\pi - \frac{\pi}{6}$	$\pi - \frac{\pi}{4}$	$\pi - \frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

Б.8. Основные элементарные функции

Б.8.1. Степенные функции

1. Функция вида $y = x^n$, при $n \in \mathbb{N}$ в зависимости от чётности показателя степени n имеет два случая (см. рис. Б.1):

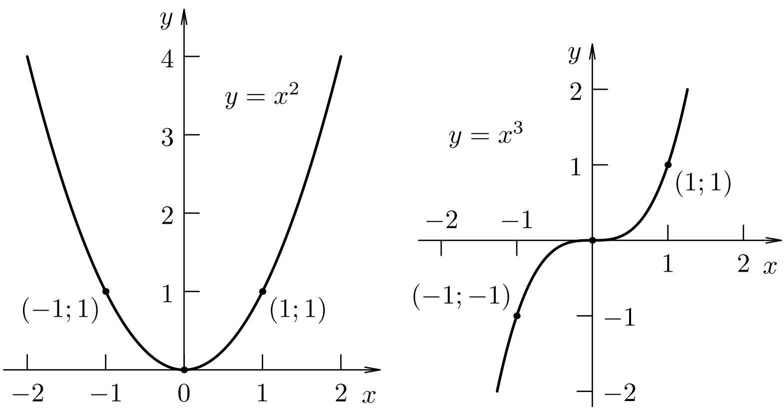


Рис. Б.1. Графики степенных функций вида $y = x^n$

а) если n — чётно, то $D(y) = (-\infty,\infty)$, $E(y) = [0,\infty)$, чётная $f(-x) = +f(x)$, непериодическая, убывающая при $x \in (-\infty,0)$ и возрастающая при $x \in (0,\infty)$ (ведёт себя как $y = x^2$);

б) если n — нечётно, то $D(y) = (-\infty,\infty)$, $E(y) = (-\infty,\infty)$, нечётная $f(-x) = -f(x)$, непериодическая, возрастающая при $x \in (-\infty,\infty)$ (при $n > 1$ ведёт себя как $y = x^3$, при $n = 1$ графиком функции $y = x$ является биссектриса 1-го и 3-го координатных углов).

2. Функция вида $y = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, при $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ в зависимости от чётности показателя степени n имеет два случая (см. рис. Б.2):

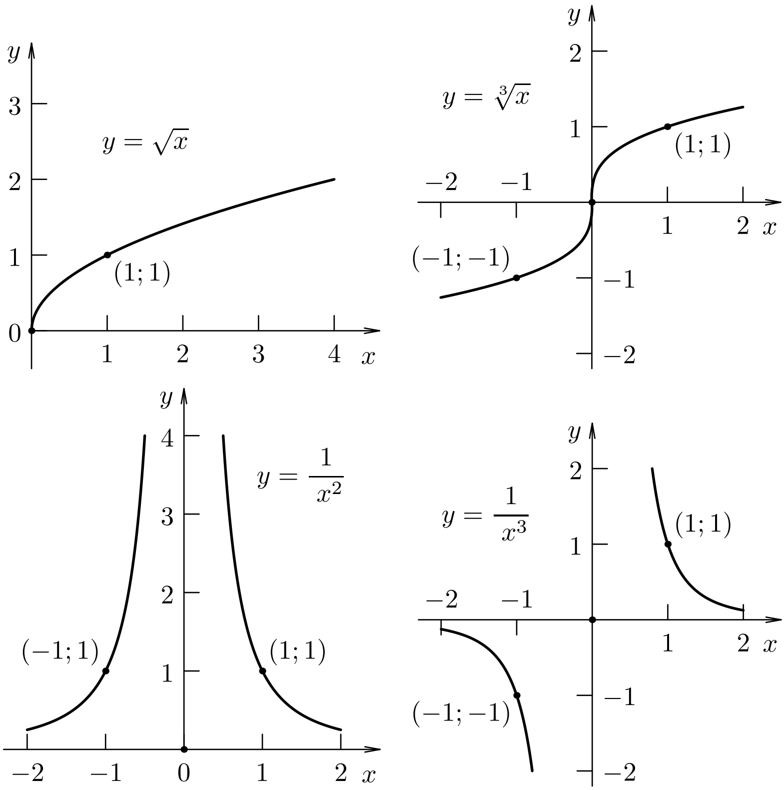


Рис. Б.2. Графики степенных функций вида $y = \sqrt[n]{x}$ и $y = 1/x^n$

а) если n — чётно, то $D(y) = [0,\infty)$, $E(y) = [0,\infty)$, функция общего вида, непериодическая, возрастающая при $x \in (0,\infty)$;

б) если n — нечётно, то $D(y) = (-\infty,\infty)$, $E(y) = (-\infty,\infty)$, нечётная $f(-x) = -f(x)$, непериодическая, возрастающая при $x \in \in (-\infty,\infty)$.

3. Функция вида $y = 1/x^n = x^{-n}$, при $n \in \mathbb{N}$ в зависимости от чётности показателя степени n имеет два случая (см. рис. Б.2):

а) если n — чётно, то $D(y) = (-\infty,0) \cup (0,\infty)$, $E(y) = (0,\infty)$, чётная $f(-x) = +f(x)$, непериодическая, возрастающая при $x \in (-\infty,0)$ и убывающая при $x \in (0,\infty)$;

б) если n — нечётно, то $D(y) = (-\infty,0) \cup (0,\infty)$, $E(y) = (-\infty,0) \cup \cup (0,\infty)$, нечётная $f(-x) = -f(x)$, непериодическая, убывающая при $x \in (-\infty,0) \cup (0,\infty)$.

Б.8.2. Показательная и логарифмическая функции

1. Показательная функция $y = a^x$, при $a > 0$, $a \neq 1$ в зависимости от величины параметра a имеет два случая (см. рис. Б.3):

а) если $a > 1$, то $D(y) = (-\infty,\infty)$, $E(y) = (0,\infty)$, функция общего вида, непериодическая, возрастающая при $x \in (-\infty,\infty)$; в частности получило распространение основание $a = e$ — основание натурального логарифма (число Эйлера), где $e = 2{,}71828\ldots$

б) если $0 < a < 1$, то $D(y) = (-\infty,\infty)$, $E(y) = (0,\infty)$, функция общего вида, непериодическая, убывающая при $x \in (-\infty,\infty)$.

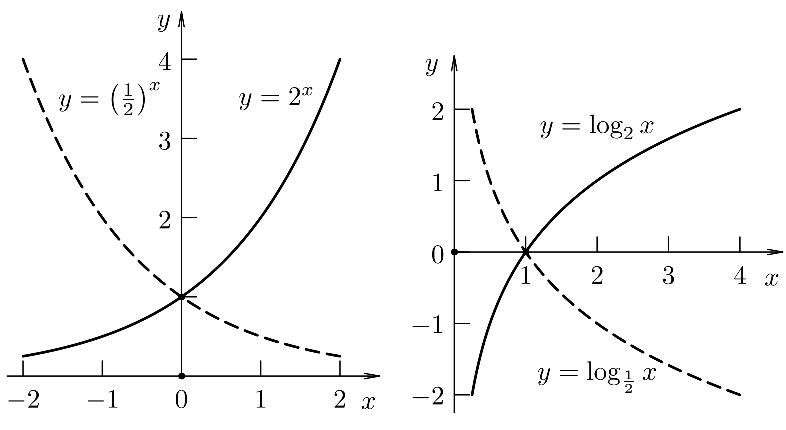


Рис. Б.3. Графики функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$

2. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, при $a > 0$, $a \neq 1$ в зависимости от величины параметра a имеет два случая (см. рис. Б.3):

а) если $a > 1$, то $D(y) = (0,\infty)$, $E(y) = (-\infty,\infty)$, функция общего вида, непериодическая, возрастающая при $x \in (0,\infty)$; в частности:

- ▷ если $a = e = 2{,}71828\ldots$, то функцию называют натуральным логарифмом и обозначают $y = \log_e x = \ln x$;
- ▷ если $a = 10$, то функцию называют десятичным логарифмом и обозначают $y = \log_{10} x = \lg x$;

б) если $0 < a < 1$, то $D(y) = (0,\infty)$, $E(y) = (-\infty,\infty)$, функция общего вида, непериодическая, убывающая при $x \in (0,\infty)$.

Б.8.3. Тригонометрические функции

1. Функция $y = \sin x$: $D(y) = (-\infty,\infty)$, $E(y) = [-1,1]$, нечётная $f(-x) = -f(x)$, периодическая $T = 2\pi$, возрастающая при $x \in [-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n]$ и убывающая при $x \in [\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n]$, где $n \in \mathbb{Z}$ (см. рис. Б.4).

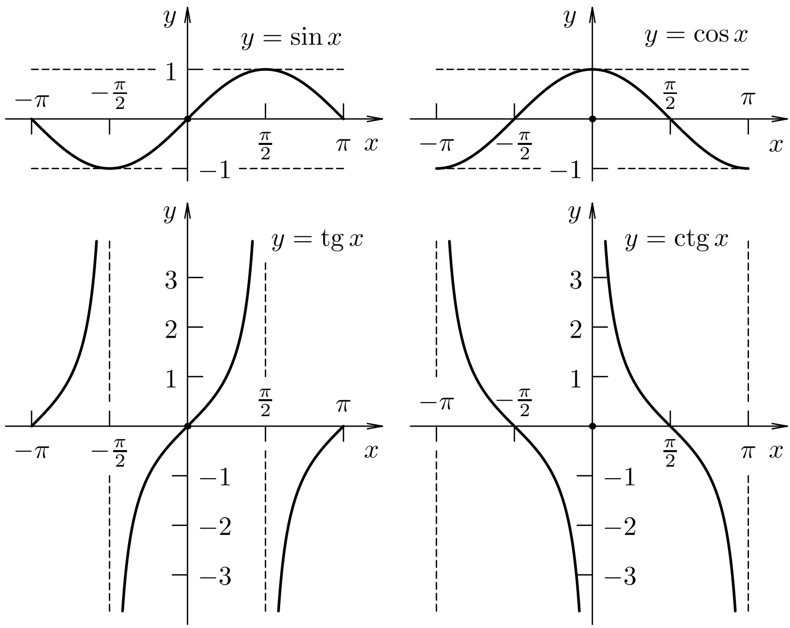


Рис. Б.4. Графики тригонометрических функций

2. Функция $y = \cos x$: $D(y) = (-\infty,\infty)$, $E(y) = [-1,1]$, чётная $f(-x) = +f(x)$, периодическая $T = 2\pi$, возрастающая при $x \in [-\pi+2\pi n, 2\pi n]$ и убывающая при $x \in [2\pi n, \pi + 2\pi n]$, где $n \in \mathbb{Z}$ (см. рис. Б.4).

3. Функция $y = \operatorname{tg} x$: $D(y) = (-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $E(y) = (-\infty, \infty)$, нечётная $f(-x) = -f(x)$, периодическая $T = \pi$, возрастающая при $x \in (-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n)$, где $n \in \mathbb{Z}$ (см. рис. Б.4).
4. Функция $y = \operatorname{ctg} x$: $D(y) = (\pi n, \pi + \pi n)$, $E(y) = (-\infty, \infty)$, нечётная $f(-x) = -f(x)$, периодическая $T = \pi$, убывающая при $x \in (\pi n, \pi + \pi n)$, где $n \in \mathbb{Z}$ (см. рис. Б.4).

Б.8.4. Обратные тригонометрические функции

1. Функция $y = \arcsin x$: $D(y) = [-1, 1]$, $E(y) = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, нечётная $f(-x) = -f(x)$, непериодическая, возрастающая при $x \in [-1, 1]$ (см. рис. Б.5).

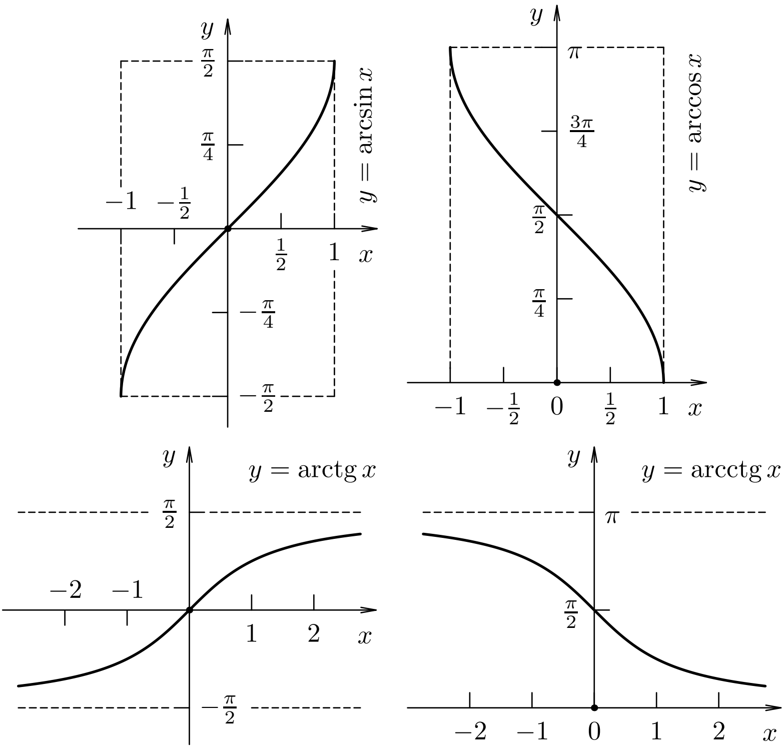


Рис. Б.5. Графики обратных тригонометрических функций

2. Функция $y = \arccos x$: $D(y) = [-1, 1]$, $E(y) = [0, \pi]$, общего вида, непериодическая, убывающая при $x \in [-1, 1]$ (см. рис. Б.5).
3. Функция $y = \operatorname{arctg} x$: $D(y) = (-\infty, \infty)$, $E(y) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, нечётная $f(-x) = -f(x)$, непериодическая, возрастающая при $x \in (-\infty, \infty)$ (см.

рис. Б.5).
4. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$: $D(y) = (-\infty, \infty)$, $E(y) = (0, \pi)$, общего вида, непериодическая, убывающая при $x \in (-\infty, \infty)$ (см. рис. Б.5).

Б.9. Решения простейших уравнений

1. Тригонометрические уравнения вида $f(x) = a$ имеют периодические решения с периодом, равным $k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \sin x &= a, && x = (-1)^k \arcsin a + k\pi; \\ \cos x &= a, && x = \ \pm \arccos a + 2k\pi; \\ \operatorname{tg} x &= a, && x = \operatorname{arctg} a + k\pi; \\ \operatorname{ctg} x &= a, && x = \operatorname{arcctg} a + k\pi. \end{aligned}$$

2. Квадратное уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ всегда имеет два решения (корня), определяемые в зависимости от знака дискриминанта $D = \sqrt{b^2 - 4ac}$ по формулам:

$$\begin{aligned} &\text{при } D \geqslant 0, && x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{D}}{2a}\,; \\ &\text{при } D < 0, && x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{-D}}{2a}\, i\,, \end{aligned}$$

где i — мнимая единица такая, что $i^2 = -1$. Для корней квадратного уравнения x_1 и x_2 выполняется теорема Виета:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}\,, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}\,.$$

3. Показательное уравнение вида $a^x = b$ при ограничениях $a > 0$, $a \neq 1$ имеет решение:

$$x = \log_a b\,.$$

4. Логарифмическое уравнение вида $\log_a x = b$ при ограничениях $a >$ > 0, $a \neq 1$ имеет решение:

$$x = a^b\,.$$

Б.10. Производные некоторых элементарных функций

1. Производная константы $C = \mathrm{const}$:

$$\Big(C\Big)' = 0\,.$$

2. Производная степенной функции x^n:

$$\Big(x^n\Big)' = n\cdot x^{n-1}\,; \qquad \Big(g^n(x)\Big)' = n\cdot g^{n-1}(x)\cdot g'(x)\,.$$

Частные случаи производной степенной функции x^n:

$$x' = 1\,; \qquad \Big(\sqrt{x}\,\Big)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,; \qquad \Big(\sqrt{g(x)}\,\Big)' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}\,.$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\,; \qquad \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}\,.$$

3. Производные показательной a^x и логарифмической $\log_a x$ функций:

$$\Big(a^x\Big)' = a^x\cdot\ln a\,; \qquad \Big(a^{g(x)}\Big)' = a^{g(x)}\cdot\ln a\cdot g'(x)\,;$$

$$\Big(\log_a x\Big)' = \frac{1}{x\cdot\ln a}\,; \qquad \Big(\log_a g(x)\Big)' = \frac{g'(x)}{g(x)\cdot\ln a}\,.$$

Частные случаи производных показательной e^x и логарифмической $\ln x$ функций:

$$\Big(e^x\Big)' = e^x\,; \qquad \Big(e^{g(x)}\Big)' = e^{g(x)}\cdot g'(x)\,;$$

$$\Big(\ln x\Big)' = \frac{1}{x}\,; \qquad \Big(\ln g(x)\Big)' = \frac{g'(x)}{g(x)}\,.$$

4. Производные тригонометрических функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$:

$$\Big(\sin x\Big)' = \cos x\,; \qquad \Big(\sin g(x)\Big)' = \cos g(x)\cdot g'(x)\,;$$

$$\Big(\cos x\Big)' = -\sin x\,; \qquad \Big(\cos g(x)\Big)' = -\sin g(x)\cdot g'(x)\,;$$

$$\Big(\operatorname{tg} x\Big)' = \frac{1}{\cos^2 x}\,; \qquad \Big(\operatorname{tg} g(x)\Big)' = \frac{g'(x)}{\cos^2 g(x)}\,;$$

$$\Big(\operatorname{ctg} x\Big)' = -\frac{1}{\sin^2 x}\,; \qquad \Big(\operatorname{ctg} g(x)\Big)' = -\frac{g'(x)}{\sin^2 g(x)}\,.$$

5. Производные обратных тригонометрических функций $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$:

$$\Bigl(\arcsin x\Bigr)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,; \qquad \Bigl(\arcsin g(x)\Bigr)' = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}\,;$$

$$\Bigl(\arccos x\Bigr)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,; \qquad \Bigl(\arccos g(x)\Bigr)' = -\frac{g'(x)}{\sqrt{1-g^2(x)}}\,;$$

$$\Bigl(\operatorname{arctg} x\Bigr)' = \frac{1}{1+x^2}\,; \qquad \Bigl(\operatorname{arctg} g(x)\Bigr)' = \frac{g'(x)}{1+g^2(x)}\,;$$

$$\Bigl(\operatorname{arcctg} x\Bigr)' = -\frac{1}{1+x^2}\,; \qquad \Bigl(\operatorname{arcctg} g(x)\Bigr)' = -\frac{g'(x)}{1+g^2(x)}\,.$$

Б.11. Правила дифференцирования и интегрирования

1. Дифференцирование и интегрирование произведения константы и функции и суммы двух функций:

$$(C\cdot f)' = C\cdot f'; \qquad (f\pm g)' = f'\pm g';$$

$$\int (C\cdot f)\,dx = C\cdot\int f\,dx\,; \qquad \int (f\pm g)\,dx = \int f\,dx \pm \int g\,dx\,.$$

2. Дифференцирование произведения и частного двух функций и интегрирование по частям:

$$(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'; \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}\,;$$

$$\int f\,dg = fg - \int g\,df\,.$$

3. Дифференцирование сложной функции и интегрирование дифференциала:

$$\bigl[f\bigl(g(x)\bigr)\bigr]' = f'_g\cdot g'_x\,; \qquad \int df = f + C\,.$$

Б.12. Неопределённые интегралы некоторых элементарных функций

1. Интегралы степенной функции x^n:

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{ для } \forall\, n\neq -1\,; \qquad \int\frac{dx}{x} = \ln|x| + C\,.$$

Частные случаи интеграла степенной функции x^n:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C\,; \qquad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C\,.$$

2. Интегралы показательной функции a^x и ее частного случая e^x:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\,; \qquad \int e^x dx = e^x + C\,.$$

3. Интегралы тригонометрических функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$:

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C\,; \qquad \int \cos x\, dx = \sin x + C\,;$$

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C\,; \qquad \int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C\,.$$

4. Интегралы, приводящие к тригонометрическим функциям $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C\,; \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C\,.$$

5. Интегралы, приводящие к обратным тригонометрическим функциям $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C\,; \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C\,;$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C\,; \qquad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C\,.$$

6. Интегралы, приводящие к логарифмическим функциям:

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C\,,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C\,.$$

Б.13. Разложение в ряд Маклорена некоторых элементарных функций

1. Степенная функция $(a+x)^m$ имеет разложение в ряд Маклорена

$$(a+x)^m = a^m + \frac{m}{1!}a^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{2!}a^{m-2}x^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}a^{m-n}x^n + \ldots\,,$$

который сходится в области:

$$-a < x < a\,, \quad \text{при} \quad a > 0\,,\ m \leqslant -1\,;$$
$$-a < x \leqslant a\,, \quad \text{при} \quad a > 0\,,\ -1 < m < 0\,;$$
$$-a \leqslant x \leqslant a\,, \quad \text{при} \quad a > 0\,,\ m \geqslant 0\,.$$

2. Разложение в ряд показательных функций a^x, e^x :

$$a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!}\,x + \frac{\ln^2 a}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{\ln^n a}{n!}\,x^n + \ldots\,, \qquad -\infty < x < \infty\,.$$
$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}\,x + \frac{1}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\,x^n + \ldots\,, \qquad -\infty < x < \infty\,.$$

3. Разложение в ряд логарифмических функций $\ln(1+x)$, $\ln\frac{1+x}{1-x}$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\,x^n + \ldots\,, \quad -1 \leqslant x < 1\,;$$
$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\,\Bigl(x + \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{5}\,x^5 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{2n+1}\,x^{2n+1} + \ldots\Bigr)\,, \quad -1 \leqslant x < 1\,.$$

4. Разложение в ряд тригонометрических функций $\sin x$, $\cos x$:

$$\sin x = \frac{1}{1!}\,x - \frac{1}{3!}\,x^3 + \frac{1}{5!}\,x^5 - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\,x^{2n+1} + \ldots\,, \quad -\infty < x < \infty\,;$$
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}\,x^2 + \frac{1}{4!}\,x^4 - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n\frac{1}{(2n)!}\,x^{2n} + \ldots\,, \quad -\infty < x < \infty\,.$$

5. Разложение в ряд обратных тригонометрических функций $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2\cdot 3}\,x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\,x^5 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)\cdot (2n+1)}\,x^{2n+1} + \ldots\,, \quad -1 < x < 1\,;$$
$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{5}\,x^5 - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n\frac{1}{2n+1}\,x^{2n+1} + \ldots\,, \quad -1 < x \leqslant 1\,.$$

Б.14. Таблица значений функции Гаусса

$\varphi(x)$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Б.15. Таблица значений функции Лапласа

$\Phi(x)$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Учебное издание

Москалев Павел Валентинович
Гриднева Ирина Владимировна
Шацкий Владимир Павлович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В ПРОФЕССИОНАЛЬНОМ ОБУЧЕНИИ

Учебное пособие
издаётся в авторской редакции

Подписано в печать ...... 2014 г. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$.
Гарнитура «Concrete». Печать офсетная.
Бумага офсетная. Объём ... п.л. Тираж 50 экз.
Заказ № ...

Федеральное бюджетное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Воронежский государственный аграрный университет
имени императора Петра I» Типография ФГБОУ ВПО ВГАУ
394087 г. Воронеж, ул. Мичурина, 1
Информационная поддержка: **http://ts2k.vsau.ru/tgrafindex/**

Отпечатано с оригинал-макета заказчика. Ответственность
за содержание предоставленного оригинал-макета типография не несет.
Требования и пожелания излагайте авторам данного издания.